Bachelet
Ascissa curvilinea
prima parte

Equazione vettoriale del moto

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} v_x(t) & v_y(t) & v_z(t) \end{pmatrix} = \frac{d\vec{r}}{dt} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} & \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} & \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} a_x(t) & a_y(t) & a_z(t) \end{pmatrix} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} & \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} & \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt} & \frac{d^2z}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \end{pmatrix}$$

Rappresentazione intrinseca della traiettoria

$$\vec{r}(s) = \begin{pmatrix} x(s) & y(s) & z(s) \end{pmatrix}$$

$$\hat{u}_t = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \begin{pmatrix} u_x(s) & u_y(s) & u_z(s) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta s} & \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta s} & \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\hat{u}_t}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \hat{u}_t}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}\hat{u}_n = \frac{1}{\rho}\hat{u}_n$$

Equazione oraria (o legge oraria) del moto

$$s(t) \;\; ; \;\; \dot{s} = \frac{ds}{dt} = v_s \;\; ; \;\; \ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\,\hat{u}_t$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\,\hat{u}_t) = \ddot{s}\,\hat{u}_t + \dot{s}\,\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \ddot{s}\,\hat{u}_t + \dot{s}\,\frac{d\hat{u}_t}{ds}\frac{ds}{dt} = \ddot{s}\,\hat{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{u}_n$$

Calcolo della lunghezza di un arco di traiettoria

Dato un verso positivo convenzionalmente scelto lungo la curva, la lunghezza (orientata) dell'arco di traiettoria fra gli istanti t_1 e t_2 si può esprimere come

$$\Delta s_{12} = s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} v_s dt.$$

Δs_{12} è positiva se il punto, all'istante t_2, si trova piú avanti (secondo il verso convenzionalmente positivo) rispetto all'istante t_1; negativa in caso contrario. Può anche essere nulla, se fra t_1 e t_2 il moto s'inverte, per poi concludersi nel punto in cui è iniziato. Quando fra t_1 e t_2 la traiettoria si svolge in un unico verso di percorrenza, v_s ha sempre lo stesso segno e il calcolo dell'arco di traiettoria è particolarmente semplice. Ad esempio, se il verso è sempre positivo (in qualsiasi istante t fra t_1 e t_2 è $v_s(t) = \dot{s} > 0$), possiamo sostituire a v_s il modulo $|v_s|$. L'arco di traiettoria fra $t_1 = 0$ e $t_2 > 0$, per un peso che cade lungo z partendo a $t = 0$ con velocità iniziale $\begin{pmatrix} v_{0x} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, con $v_{0x} > 0$, è per esempio

$$s(t_2) - s(t_1 = 0) = \int_0^{t_2} \sqrt{v_{0x}^2 + g^2 t^2}\; dt = \frac{v_{0x} t_2}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{g t_2}{v_{0x}}\right)^2} + \frac{v_{0x}^2}{2g} \ln\left[\frac{g t_2}{v_{0x}} + \sqrt{1 + \left(\frac{g t_2}{v_{0x}}\right)^2}\right].$$