Risposte all'esercizio della pista:

1. L'equazione richiesta individua la pista (traiettoria) in funzione della coordinata curvilinea s, lunghezza dell'arco di curva misurato a partire da un'origine (scelta per comodità nel punto A); fornisce cioè, per ogni valore di s, la posizione dell'automobile (le sue due coordinate x e y, la pista è tutta nel piano xy); dobbiamo determinare queste due funzioni x(s), y(s) e per farlo ci conviene dividere la pista in cinque tratte, e poi determinarle per ogni tratta separatamente, come mostrato qui sotto (prime tre colonne della tavola A).

Tavola A

	tratta	x(s)	y(s)	dx/ds	dy/ds	d^2x/ds^2	d^2y/ds^2	c	ρ=1/c
I	$0 \le s \le R$	$R - s$	$-3R$	-1	0	0	0	0	∞
II	$R \le s \le R+\pi R$	$-R\sin[(s/R) - 1]$	$-2R - R\cos[(s/R) - 1]$	$-\cos[(s/R) - 1]$	$\sin[(s/R) - 1]$	$(1/R)\sin[(s/R) - 1]$	$(1/R)\cos[(s/R) - 1]$	(1/R)	R
III	$R+\pi R \le s \le R+2\pi R$	$-R\sin[(s/R) - 1]$	$R\cos[(s/R) -1]$	$-\cos[(s/R) - 1]$	$-\sin[(s/R) - 1]$	$(1/R)\sin[(s/R) - 1]$	$-(1/R)\cos[(s/R) - 1]$	(1/R)	R
IV	$R+2\pi R \le s \le R + (5/2)\pi R$	$-R\sin[(s/R) - 1]$	$2R - R\cos[(s/R) -1]$	$-\cos[(s/R) - 1]$	$\sin[(s/R) - 1]$	$(1/R)\sin[(s/R) - 1]$	$(1/R)\cos[(s/R) - 1]$	(1/R)	R
V	$R + (5/2)\pi R \le s \le 2R + (5/2)\pi R$	$-R$	$s + R - (5/2)\pi R$	0	1	0	0	0	∞

2. Quando v_s, velocità scalare, è costante nel tempo, la soluzione generale è $s(t) = s_0 + v_s t$. Scegliendo per comodità l'origine dei tempi nell'istante iniziale, la distanza s misurata lungo la pista dal punto di partenza A deve essere nulla nell'istante t=0; dobbiamo quindi porre $s_0 = 0$ e la legge oraria che ne risulta per l'automobile è semplicemente $s(t) = v_s t$.
3. Per una traiettoria piana come questa il versore tangente è $\mathbf{u}_{tan} = (dx/ds, dy/ds)$. Il vettore velocità, conoscendo v_s e il versore tangente $\mathbf{u}_{tan}$, è dato da $\mathbf{v} = v_s\, \mathbf{u}_{tan}$; le sue componenti sono $v_x = v_s \cdot (dx/ds)$ e $v_y = v_s \cdot (dy/ds)$. Grazie alla tavola A calcoliamo, in ogni tratta, dx/ds e dy/ds (quarta e quinta colonna); cosí facendo otteniamo $\mathbf{u}_{tan}$, e quindi $\mathbf{v} = v_s\, \mathbf{u}_{tan}$ (espressa in funzione dell'ascissa curvilinea s, non ancora del tempo t); la velocità $\mathbf{v}$ in funzione del tempo, richiesta dal testo, si ottiene passando dall'ascissa curvilinea al tempo, attraverso la legge oraria $s = v_s t$ (vedi risposta precedente). Cosí otteniamo il versore tangente $\mathbf{u}_{tan} = (dx/ds, dy/ds)$ in funzione del tempo t (le due colonne della Tavola B relative a dx/ds e dy/ds) e, moltiplicando per v_s **,** le due componenti di $\mathbf{v}(t)$.

4. Poiché la velocità scalare v_s è costante nel tempo, l'accelerazione tangenziale $(dv_s/dt)\,\mathbf{u}_{tan}$ è nulla, quindi l'accelerazione è soltanto normale (o centripeta): $\mathbf{a} = (v_s^2/\rho)\,\mathbf{u}_n$. Il versore normale, per una traiettoria piana come questa, è $\mathbf{u}_n = (-dy/ds,\, dx/ds)$ quando la traiettoria gira (per chi guarda il foglio) in senso antiorario, e $\mathbf{u}_n = (dy/ds,\, -dx/ds)$ quando gira in senso orario (se per convenzione è scelto in modo che sia diretto sempre verso l'interno della curva). Le componenti dell'accelerazione centripeta si possono ottenere derivando due volte la posizione oppure moltiplicando per (v_s^2/ρ) il versore normale (le cui componenti sono quelle che abbiamo appena visto); anche in tal caso ci servono le derivate seconde d^2x/ds^2 e d^2y/ds^2 (sesta e settima colonna delle tavole A e B), come ingredienti per il calcolo del raggio di curvatura ρ. La curvatura c (ottava colonna) è infatti la radice quadrata della somma dei quadrati di d^2x/ds^2 e d^2y/ds^2, e il raggio di curvatura (nona colonna) è $\rho = (1/c)$, l'inverso della curvatura c. Una volta svolti tutti questi passaggi per la nostra pista otteniamo, prevedibilmente, un raggio di curvatura $\rho = R$ nei tratti semicircolari, e un raggio di curvatura infinito nei tratti rettilinei. Fatto ciò, per ottenere le due componenti del vettore accelerazione $a_x(t) = -(v_s^2/\rho)\,(dy/ds)$ e $a_y(t) = (v_s^2/\rho)\,(dx/ds)$ in funzione del tempo t basta partire dai valori di dx/ds, dy/ds e ρ in funzione dell'ascissa curvilinea forniti dalla Tavola A e utilizzare la legge oraria $s = v_s t$ della risposta 2 (vedi Tavola B).

Tavola B

	tratta	x(s)	y(s)	dx/ds	dy/ds	d^2x/ds^2	d^2y/ds^2	c	ρ=1/c
I	$0 \le t \le R/v_s$	$R - v_s t$	$-3R$	-1	0	0	0	0	∞
II	$R/v_s \le t \le (1+\pi)R/v_s$	$-R\sin[(v_s t/R) - 1]$	$-2R - R\cos[(v_s t/R) - 1]$	$-\cos[(v_s t/R) - 1]$	$\sin[(v_s t/R) - 1]$	$(1/R)\sin[(v_s t/R) - 1]$	$(1/R)\cos[(v_s t/R) - 1]$	(1/R)	R
III	$(1+\pi)R/v_s \le t \le (1+2\pi)R/v_s$	$-R\sin[(v_s t/R) - 1]$	$R\cos[(v_s t/R) - 1]$	$-\cos[(v_s t/R) -1]$	$-\sin[(v_s t/R) - 1]$	$(1/R)\sin[(v_s t/R) - 1]$	$-(1/R)\cos[(v_s t/R) - 1]$	(1/R)	R
IV	$(1+2\pi)R/v_s \le t \le (1+2.5\pi)R/v_s$	$-R\sin[(v_s t/R) - 1]$	$2R - R\cos[(v_s t/R) - 1]$	$-\cos[(v_s t/R) - 1]$	$\sin[(v_s t/R) - 1]$	$(1/R)\sin[(v_s t/R) - 1]$	$(1/R)\cos[(v_s t/R) - 1]$	(1/R)	R
V	$(1+2.5\pi)R/v_s \le t \le (2+2.5\pi)R/v_s$	$-R$	$v_s t + R - (5/2)\pi R$	0	1	0	0	0	∞

5. Se l'automobile viaggia a velocità scalare v_s costante nel tempo e parte dal punto A all'istante t=0, essa raggiunge il punto B nell'istante $t=(2+2.5\pi)R/v_s$, come già mostrato al punto precedente nella Tavola B.