

2. Moto uniformemente accelerato

Il motore di un'automobile può imprimere un'accelerazione massima $a_1 = 2 \text{ m/s}^2$ e l'impianto frenante può decelerarla al massimo con $a_2 = -4 \text{ m/s}^2$. Calcolare il tempo minimo necessario affinché l'auto, partendo da ferma, arrivi in un punto distante $s = 500 \text{ m}$ dal punto di partenza con velocità nulla.

Soluzione

Indicando con t_1 l'istante in cui cessa l'azione accelerante del motore e ha inizio l'azione frenante, la velocità e lo spazio percorso dall'automobile sono dati da

$$v(t) = a_1 t_1 + a_2(t - t_1) \quad s(t) = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + v_1(t - t_1) + \frac{1}{2} a_2(t - t_1)^2 \quad (5)$$

Tenuto conto che $v_1 = v(t_1) = a_1 t_1$ e che, all'istante finale, $v_f = 0 \text{ m/s}$ e $s_f = 500 \text{ m}$, dal sistema precedente si ricava

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_f}{a_1 \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right)}} = 18.25 \text{ s}; \quad t = \sqrt{\frac{2s_f}{a_1} \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right)} = 27.39 \text{ s} \quad (6)$$

Notare che il rapporto tra t e t_1 (adimensionale) non dipende dallo spazio percorso, ma solamente dal rapporto tra le accelerazioni

$$\frac{t}{t_1} = \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) \quad (7)$$

Nel nostro caso, troviamo che il tempo di frenata $(t - t_1)$ è pari alla metà del tempo di accelerazione t_1 .

4. Studio di un moto con $v = f(t)$

La velocità di un punto che si muove sull'asse x è data da $v(t) = A(Bt - 1)^4$ con $A = 1$ m/s e $B = 1$ s⁻¹. Studiare il moto sapendo che la posizione iniziale è $x(t=0) = x_0 = -0.2$ m.

Soluzione

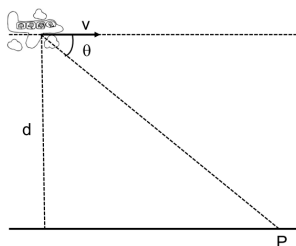
La posizione e l'accelerazione del punto sono date da

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^t v(t') dt' = x_0 + \frac{A}{5B} [(Bt - 1)^5 + 1] = \frac{(t-1)^5}{5} \\ a(t) &= 4AB(Bt - 1)^3 = 4(t - 1)^3 \end{aligned} \quad (9)$$

Il punto parte da x_0 e si muove lungo la direzione positiva dell'asse x , raggiungendo l'origine a $t_1 = 1$ s; la velocità è positiva e si annulla a t_1 ; l'accelerazione è negativa fino a t_1 , quando si annulla. Di conseguenza, il punto rallenta e raggiunge l'origine con velocità ed accelerazione nulle.

5. Moto dei gravi

Un aereo viaggia orizzontalmente alla velocità $v = 600 \text{ km/h}$ ad un'altezza $d = 1 \text{ km}$. All'istante $t = 0$ esso sgancia un oggetto che deve cadere in un punto prestabilito P . Calcolare sotto quale angolo rispetto all'orizzontale deve essere visto P dall'aereo al momento dello sgancio (si trascuri la resistenza dell'aria).



Soluzione

Si tratta di un moto in due dimensioni, per cui definiamo un sistema di riferimento Oxy , con origine O nel punto di sgancio e asse y diretto verso il basso. Il problema si risolve considerando che, nel tempo che l'oggetto impiega a cadere al suolo (cioè a percorrere l'altezza d), deve essere coperta la distanza tra il punto di sgancio e la coordinata x del punto P . Ora, il moto lungo y è un moto uniformemente accelerato (con accelerazione di gravità g), mentre il moto lungo x è uniforme con velocità v . Da queste considerazioni, si ricava

$$x_P = vt; \quad d = \frac{1}{2}gt^2 \quad (10)$$

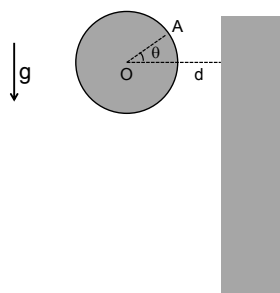
da cui $t = 14.2 \text{ s}$ e $x_P = 2367 \text{ m}$ (si ricordi che $1 \text{ km/h} = (1000/3600) \text{ m/s}$). L'angolo θ rispetto all'orizzontale si ricava da

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{d}{x_P} \rightarrow \theta = 22.9^\circ \quad (11)$$

Annotazione Piccola annotazione riguardante la descrizione del moto in base al sistema di riferimento. Nel sistema di riferimento solidale con l'aereo, l'aereo rimane immobile, l'oggetto si muove esclusivamente lungo l'asse y ed è il punto P a muoversi con velocità $-v$ verso le x negative. Nel sistema di riferimento solidale con il punto P , l'aereo si muove con velocità v verso le x positive, il punto P rimane immobile e l'oggetto descrive un moto bidimensionale dato dalla composizione di un moto uniformemente accelerato lungo y e un moto uniforme (con velocità v) lungo x .

7. Moto circolare e moto dei gravi

Una ruota di raggio $R = 50$ cm gira con moto uniforme in verso orario intorno ad un asse orizzontale passante per il suo centro O ; la velocità angolare vale $\omega = 2\pi/T = 4\text{ s}^{-1}$. Nell'istante in cui il raggio OA forma l'angolo $\theta = \pi/6$ con l'asse x , si stacca da A un punto materiale che dopo un certo tempo colpisce una parete distante $d = 1$ m da O . Calcolare il tempo di volo del punto e la sua velocità nell'istante dell'urto.



Soluzione

Al momento del distacco, il punto si trova ad una distanza $d' = d - R \cos\theta$ dalla parete ed è dotato di una velocità di direzione tangenziale alla circonferenza e modulo $v_i = \omega R = 2$ m/s. Individuiamo un sistema di riferimento Oxy con origine O nel centro della ruota e asse y diretto verso il basso. Le componenti x e y della velocità sono date da $v_x = v \sin\theta = 1$ m/s e $v_y = v \cos\theta = 1.73$ m/s. Il moto del punto è dato dalla composizione di un moto uniforme con velocità v_x lungo l'asse x e un moto uniformemente accelerato con accelerazione di gravità g lungo l'asse y . Il tempo di volo corrisponde al tempo di impatto con la parete, cioè

$$t_{\text{volo}} = \frac{d'}{v_x} = \frac{d - R \cos\theta}{v_x} = 0.57\text{ s} \quad (15)$$

La velocità finale è

$$v_f = \sqrt{v_x^2 + v_y^2(t_{\text{volo}})} = \sqrt{v_x^2 + (v_{iy} + gt_{\text{volo}})^2} = 7.39\text{ m/s} \quad (16)$$

8. Sistemi di riferimento

Un uomo lungo la riva di un fiume vede passare davanti a sé a distanza $d = 30$ m dalla sponda un prezioso oggetto e decide di recuperarlo. L'oggetto è portato dalla corrente del fiume, che scorre a velocità $v_F = 0.5$ m/s ed il nuotatore si tuffa nel momento in cui l'oggetto passa proprio davanti a lui. Sapendo che l'uomo nuota a velocità $v_U = 1.0$ m/s, determinare:

- il tempo impiegato per raggiungere l'oggetto;
- le coordinate dell'uomo quando raggiunge l'oggetto nel sistema di riferimento con origine nella posizione iniziale dell'uomo e assi perpendicolari, di cui uno parallelo alla sponda del fiume;
- direzione e verso, nello stesso sistema di riferimento di cui sopra, in cui deve nuotare l'uomo per tornare nella sua posizione iniziale;
- il tempo impiegato a tornare indietro e lo spazio percorso.

Soluzione

Definiamo due sistemi di riferimento: il primo Oxy è fermo rispetto alla riva, ha origine nella posizione dell'uomo nel momento in cui si tuffa, asse x diretto coincidente con la riva del fiume e asse y diretto verso l'oggetto prezioso; il secondo $O'x'y'$ coincide con Oxy nel momento in cui l'uomo si tuffa ma trasla rispetto ad esso con velocità costante pari a v_F e parallela all'asse x , nello stesso verso in cui scorre il fiume.

- Nel sistema di riferimento $O'x'y'$ l'oggetto è fermo ad una distanza d dall'origine e l'uomo nuota lungo l'asse y' con velocità costante pari a v_U , quindi il tempo impiegato per raggiungere l'oggetto è dato da:

$$t_0 = \frac{d}{v_U} = 30 \text{ s} \quad (17)$$

- Definiamo t_0 l'istante in cui l'uomo raggiunge l'oggetto. In $O'x'y'$ le coordinate dell'uomo sono $x'(t_0) = 0$ e $y'(t_0) = d$, per trovare le coordinate nel sistema Oxy bisogna invertire le trasformazioni di Galileo:

$$\begin{cases} x(t) = x'(t) + OO'_x(t) \\ y(t) = y'(t) + OO'_y(t) \end{cases} \quad (18)$$

In t_0 si ha $OO'_y(t_0) = 0$ e $OO'_x(t_0) = v_F t = 15$ m, quindi $x(t_0) = 15$ m e $y(t_0) = 30$ m.

- Definiamo θ l'angolo tra la direzione in cui deve nuotare l'uomo e l'asse y' . Allora in $O'x'y'$ l'uomo nuota con velocità $v'_x = -v_U \sin \theta$ lungo l'asse x' e $v'_y = -v_U \cos \theta$ lungo l'asse y' . La sua posizione iniziale è data da $x'(t_0) = 0$, $y'(t_0) = d = 30 \text{ m}$ ed il moto è descritto da

$$\begin{cases} x'(t) = x'(t_0) + v'_x t = -v_U(t - t_0) \sin \theta \\ y'(t) = y'(t_0) + v'_y t = -v_U(t - t_0) \cos \theta \end{cases} \quad (19)$$

Dalla seconda equazione possiamo ricavare un'espressione per $\Delta t = t - t_0$ in funzione di θ , sapendo che quando l'uomo torna alla posizione iniziale $y' = 0$:

$$\Delta t = \frac{y(t_0)}{v_U \cos \theta} \quad (20)$$

Sostituendo questa espressione nella prima equazione si trova:

$$x'(t) = -y'_0 \tan \theta \quad (21)$$

Passiamo ora al sistema Oxy usando la prima delle equazioni (18), dove $OO'_x(t) = OO'_x(t_0) + v_f(t - t_0)$:

$$x(t) = -y'_0 \tan \theta + OO'_x(t_0) + y(t_0) \frac{v_f}{v_U} \frac{1}{\cos \theta} \quad (22)$$

Sapendo che quando l'uomo torna al punto di partenza $x = 0$ posso risolvere l'equazione trovando $\theta = \arccos \frac{3}{5}$ che definisce la direzione in cui l'uomo deve nuotare.

- Per trovare il tempo impiegato a tornare indietro basta usare la (20): $\Delta t = 50 \text{ s}$.

In Oxy l'uomo ha nuotato dalla posizione $x(t_0) = 15 \text{ m}$, $y(t_0) = 30 \text{ m}$ all'origine del sistema di riferimento, quindi lo spazio percorso è dato da:

$$s = \sqrt{(x(t_0))^2 + (y(t_0))^2} = 33.5 \text{ m} \quad (23)$$