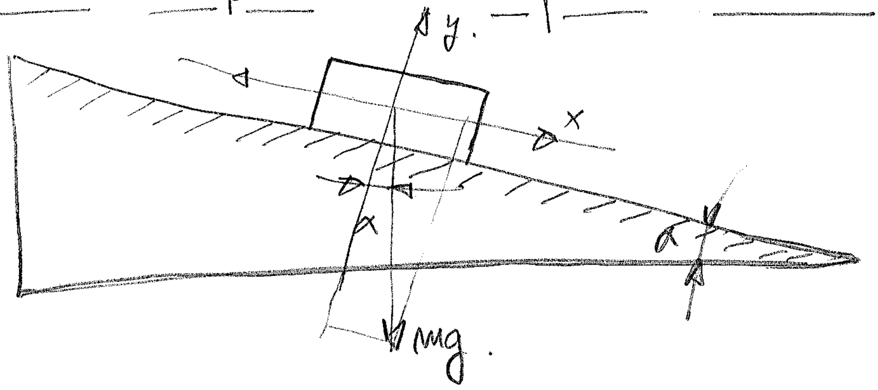
1)

Abbiamo un blochetto in un piano inclinato: (con attrito e resistenza dell'aria)



•) Dobbiamo trovare la condizione di movimento:

$$\boxed{F_{att}^{statico} = \mu_s N = \mu_s mg \cos\alpha}$$

C.d.M $\rightarrow$ $\boxed{mg\sin\alpha > F_{att}^{statico}}$ $\longrightarrow$ $\cancel{m}g\sin\alpha > \mu_s \cancel{m}g\cos\alpha$

Forza che sente il blochetto

$\boxed{tg\alpha > \mu_s}$ $\mu_s = 0.4$

$\Rightarrow \boxed{\alpha > 0.38}$

•) così, Per $\alpha = \frac{\pi}{10} \sim 0,314$ non si muove.

Per $\alpha = \frac{\pi}{8} \sim 0.39$ si si muove.

•) Una volta in movimento abbiamo: $\boxed{m\vec{a} = \vec{W} + \vec{fr} + \vec{F_{att}}}$

peso — Forza di resistenza dell'aria (del mezzo) — Forza di attrito

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - \beta\dot{x} - \mu_d mg\cos\alpha$$

$$\boxed{\ddot{x} + (\mu_d g\cos\alpha - g\sin\alpha) + \beta\dot{x} = 0}$$

Se ricordiamo il caso del paracadute, questo esempio ha la stessa forma con $g' \to g \,/\, g' = \mu_d g\cos\alpha - g\sin\alpha$

•) dobbiamo trovare la soluzione di questa equazione.
Abbiamo un teorema che dice che la soluzione per questa Eq differenziale è unica. Quindi, se trovo la soluzione, l'eq. è risolta, propio in base al Teorema appena detto.

Allora propongo una soluzione del tipo: $\boxed{x = c\, e^{-\delta t}}$
(Per la parte omogenea)

Quindi

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\delta c\, e^{-\delta t} \\ \ddot{x} &= \delta^2 c\, e^{-\delta t} \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\ddot{x} + g' + \frac{\beta}{m}\dot{x} = 0} \xrightarrow{\text{Solo la parte omogenea.}} \boxed{\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} = 0}$$

$$\delta^2 \cancel{c}\, \cancel{e^{-\delta t}} + \frac{\beta}{m}\left(-\delta \cancel{c}\, \cancel{e^{-\delta t}}\right) = 0$$

$$\boxed{\delta\left(\delta - \beta/m\right) = 0 \longrightarrow \begin{cases} \delta_1 = 0 \\ \delta_2 = \beta/m \end{cases}}$$

E con questa info:

$$x(t) = C_1 e^{-\delta_1 t} + C_2 e^{-\delta_2 t}$$

$$= C_1 e^{0} + C_2 e^{-\beta/m\, t}$$

$$\boxed{x(t) = C_1 + C_2 e^{-\beta/m\, t}}$$

E propongo una soluzione particolare del tipo cte $\times$ t: $\Rightarrow \dot{x}_p = \text{cte}$

$$\ddot{x}_p = 0.$$

$$\ddot{x} + g' + \frac{\beta}{m}\dot{x} = 0 \Rightarrow g' + \frac{\beta}{m}\text{cte} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{cte} = -g'\frac{m}{\beta}}$$

Quindi la soluzione generale è:

$$\boxed{x(t) = C_1 + C_2 e^{-\beta/m\, t} - \frac{mg'}{\beta} t}$$

•) Adesso dobbiamo imporre le condizioni iniziali:

$x(t=0)=0 \implies 0 = C_1 + C_2 \implies \boxed{C_1 = -C_2}$

$\dot{x}(t=0)=0 \implies -\frac{\beta}{m} C_2 - \frac{mg'}{\beta} = 0 \implies \boxed{C_2 = -\frac{m^2 g'}{\beta^2}} \implies \boxed{C_1 = \frac{m^2 g'}{\beta^2}}$

Allora: $$\boxed{x(t) = \frac{m^2 g'}{\beta^2}\left(1 - e^{-\beta/m\, t}\right) - \frac{mg'}{\beta} t.}$$

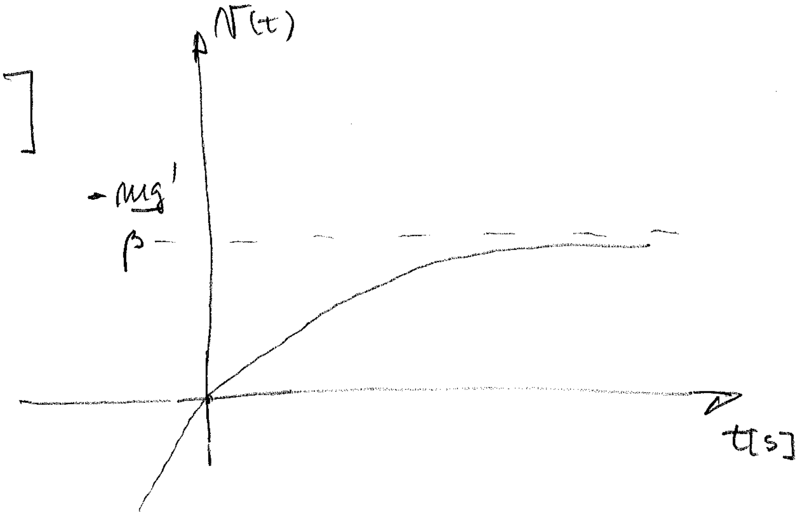
•) Ora, dobbiamo fare il plot della velocità, e trovare la velocità limite.

Prima dobbiamo vedere che: $g'<0$, dato che: $g' = (\mu d \cos\alpha - \sin\alpha) g$

e la condizione di movimento dice: $\boxed{tg\alpha > \mu s > \mu d}$

$$\boxed{g' = \cos\alpha\, g\,(\mu d - tg\alpha) < 0}$$

E così: $$v(t) = \frac{mg'}{\beta}\left[e^{-\beta/m\, t} - 1\right]$$



3) UN OROLOGIAIO ...

Periodo del pendolo: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Un orologio in ORARIO fa n periodi per arrivare a un'ora: (lo stesso che abbiamo, ma in ORARIO!)

$$\boxed{n\,T_{corretto} = 1\,ora = 3600\,s.}$$

l'orologio che abbiamo fa: $\boxed{n\,T_{abb} = 3660\,s}$ 1 minuto di ritardo.

$$\Rightarrow \boxed{n = \frac{3660\,s}{T_{abb}}}$$

il cambiamento nella lunghezza del filo è: L'UNICO che possiamo cambiare è la Lunghezza. OPPURE andare su un ALTRO pianeta con una g diversa...

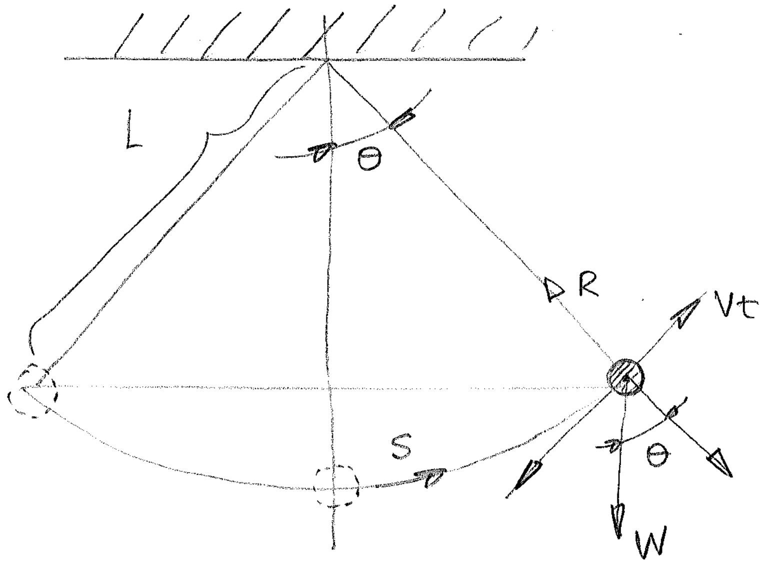
$$\frac{T_{corretto}}{T_{abb}} = \frac{3600\,s}{3660\,s}.$$

$$T_{correto} = \left(\frac{3600\,s}{3660\,s}\right) T_{abb}$$

$$\boxed{L_{NUOVA} = \left[\left(\frac{3600}{3660}\right)\frac{T_{abb}}{2\pi}\right]^2 \cdot g.}$$

$$\boxed{L_{NUOVA} = \left[\left(\frac{3600}{3660}\right)\right]^2 L_{abb}.}$$

2) PENDOLO SEMPLICE



IL MOTO AVVIENE SUL PIANO DEL FOGLIO
PENDOLO 2-D

SI TRATTA DI UNA PARTICELLA DI MASSA m, ATTACCATA A UN SOSTEGNO RIGIDO TRAMITE UN FILO INESTENSIBILE (O UN'ASTA) DI MASSA TRASCURABILE E LUNGHEZZA L

PROBLEMA SENZA ATTRITO E SENZA RESISTENZA ALL'ARIA.

IL SISTEMA, SPOSTATO DALLA POSIZIONE VERTICALE DI EQUILIBRIO E ABBANDONATO CON VELOCITÀ INIZIALE NULLA, SI METTE IN MOVIMENTO SOTTO L'AZIONE ATTIVA DEL PESO DELLA PARTICELLA

L'EQ. DEL MOTO È:

$$\boxed{\underbrace{\vec{W}}_{\text{peso}} + \underbrace{\vec{R}}_{\text{FORZA DOVUTA AL FILO}} = m\vec{a}}$$

PER EFFETTO DEL FILO, IL MOTO DEL CORPO È VINCOLATO A SVOLGERSI LUNGO UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO L.

L'EQ. VETTORIALE SCRITTA È EQUIVALENTE ALLE EQUAZIONI:

$$\begin{cases} -mg\sin\theta = m\ddot{s} = m a_T \rightarrow \text{ACCELERAZIONE TANGENZIALE} \\ -mg\cos\theta + R = m\dfrac{\dot{s}^2}{L} = m a_C \rightarrow \text{ACCELERAZIONE CENTRIPETA} : \dfrac{v^2}{\text{Raggio}} \end{cases}$$

SAPPIAMO CHE $\theta = \frac{s}{L}$, QUINDI:

$$\boxed{\ddot{s} + g \sin\left(\frac{s}{L}\right) = 0}$$

QUESTA È UN'EQ. DIFFERENZIALE TRASCENDENTE, CHE NON PUÒ ESSERE RISOLTA PER VIA ANALITICA. CONVIENE SVILUPPARE $\sin\left(\frac{s}{L}\right)$ IN SERIE DI TAYLOR, PER STUDIARE UNA SOLUZIONE APPROSSIMATA.

AL PRIMO ORDINE ABBIAMO: $\sin\left(\frac{s}{L}\right) \sim \frac{s}{L}$.

OTTENIAMO COSÌ (PER $\theta = s/L$ SUFFICIENTEMENTE PICCOLO(*)):

$$\boxed{\ddot{s} + \frac{g}{L} s = 0}$$

CHE È LA NOTA EQUAZIONE DEL MOTO OSCILLATORIO ARMONICO, DI PULSAZIONE $\omega_0 = \sqrt{g/L}$.

(*) SUFFICIENTEMENTE PICCOLO VUOL DIRE: $\theta < 10°$

PER TROVARE LA SOLUZIONE A QUESTA EQ. PROPONGO UNA SOLUZIONE DEL TIPO:

$$s(t) = s_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

ALLORA $\Rightarrow$ $\begin{cases} \dot{s}(t) = -s_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ \ddot{s}(t) = -s_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$

$$\Rightarrow -\cancel{s_0} \omega_0^2 \cancel{\cos(\omega_0 t + \varphi)} + \frac{g}{L} \cancel{s_0} \cancel{\cos(\omega_0 t + \varphi)} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

IL PERIODO È $\Rightarrow$ $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$ NON DIPENDE DELLA MASSA. SOLO DA L E g

SENZA FARE PICCOLE OSCILLAZIONI, SI PUÒ DIMOSTRARE INFATTI CHE LA SOLUZIONE DELL'EQ:

$$\ddot{s} + g \sin\left(\frac{s}{l}\right) = 0$$

È COMUNQUE PERIODICA:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\theta}{2} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 \sin^4\frac{\theta}{2} + \dots\right]$$

PICCOLE OSCILLAZIONI

CI METTIAMO LE CONDIZIONI INIZIALI:

$$S(t=0) = A_0 \implies A_0 = S_0 \cos(\varphi) \qquad \boxed{S_0 = A_0}$$

$$\dot{S}(t=0) = 0 \implies 0 = -S_0 \omega_0 \sin(\varphi) \implies \boxed{\varphi = 0}$$

ALLORA: $\boxed{S(t) = A_0 \cos(\omega_0 t)}$

SENZA FARE MOLTO IMBROGLIO:

ANCHE POSSIAMO PROPPORRE COME SOLUZIONE DI: $\boxed{\ddot{s} + \frac{g}{L} s = 0}$

$$\boxed{s(t) = s_1 \cos\omega_0 t + s_2 \sin\omega_0 t.}$$

CI METTIAMO LE CONDIZIONI INIZIALI:

$$\dot{s}(t) = -s_1 \omega_0 \sin\omega t + s_2 \omega_0 \cos\omega_0 t$$

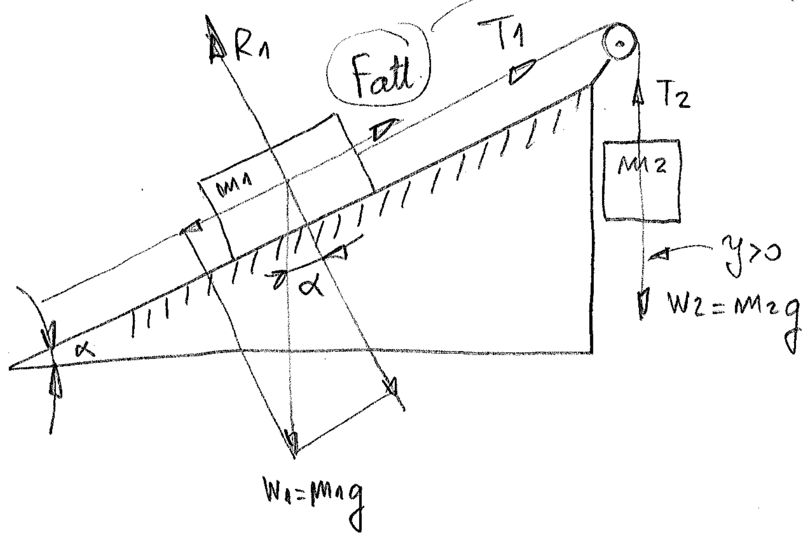
$$s(t=0) = A_0 = s_1 \Rightarrow \boxed{A_0 = s_1}$$

$$\dot{s}(t=0) = s_2 \omega_0 = 0 \Rightarrow \boxed{s_2 = 0.}$$

E SI OTTIENE LA STESSA SOLUZIONE CHE ABBIAMO OTTENUTO PRIMA:

$$\boxed{s(t) = A_0 \cos(\omega_0 t)}$$

4)



ANCORA NON SAPPIAMO IL SENSO. SEMPRE È OPPOSTO AL MOTO.

COME SEMPRE QUA IN DINAMICA, "L'UNICO" CHE ABBIAMO È LA LEGGE DI NEWTON. PER OGNI CORPO (MASSA) SI SCRIVE L'EQ. DI MOVIMENTO:

$$m_1 : \begin{cases} \hat{x} : \; T_1 - g m_1 \sin\alpha \pm F_{att} = m_1 a \\ \hat{y} : \; R_1 = m_1 g \cos\alpha \Rightarrow \boxed{F_{att} = \mu_{(i)} g m_1 \cos\alpha} \end{cases}$$

$\boxed{i = \text{statico o dinamico}}$

IL SEGNO ($\pm$) DIPENDE DEL SENSO DEL MOTO. ANCORA NON LO SAPPIAMO

$$m_2 : \left\{ \hat{y} : \; g m_2 - T_2 = m_2 a \right.$$

L'ACCELERAZIONE È LA STESSA PER OGNI MASSA

CONDIZIONE FILO SEMPRE CON TENSIONE → $\boxed{T_1 = T_2}$ E $E_Q[m_2 \hat{x}] \rightarrow E_Q[m_1 \hat{y}] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{g m_2 - g m_1 \sin\alpha \pm F_{att} = (m_1 + m_2) a}$$

LA CONDIZIONE DI MOVIMENTO È QUELLA CHE FA $a \neq 0$.

IN PARTICOLARE:

$$|F_{att}^{Statico}| < |g m_2 - g m_1 \sin\alpha|$$

COSÌ SI DICE CHE NON IMPORTA IL SENSO DEL MOTO SOLO CHE SI MUOVE

$$\mu_S m_1 \cos\alpha < |m_2 - m_1 \sin\alpha|$$

$$\mu_S \cos\alpha < \left|\frac{m_2}{m_1} - \sin\alpha\right|$$

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} < \left|\frac{10}{5} - \frac{1}{2}\right| \Rightarrow \boxed{0{,}43 < 1{,}5}!! \quad \boxed{\text{SI MUOVE}}$$

ORA CHE SAPPIAMO CHE SI MUOVE, DOBBIAMO VEDERE IN CHE SENSO È:

PER QUESTA PARTE E SOLO PER QUESTA PARTE, SUPPONIAMO CHE NON C'È ATTRITO ($F_{att} = 0$):

$$g m_2 - g m_1 \sin\alpha = (m_1 + m_2)\, a$$

$$\boxed{a = \frac{g}{(m_1 + m_2)}(m_2 - m_1 \sin\alpha)}$$

VALIDO CON $F_{att} = 0$

i) $m_2 > m_1 \sin\alpha \Rightarrow a > 0 \Rightarrow \begin{cases} m_2 \text{ SCENDE} \\ m_1 \text{ SALE} \end{cases}$

ii) $m_2 < m_1 \sin\alpha \Rightarrow a < 0 \Rightarrow \begin{cases} m_2 \text{ SALE} \\ m_1 \text{ SCENDE} \end{cases}$

IL NOSTRO CASO È: $10\,kg > 5\,kg\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow$ i) $a > 0 \Rightarrow \begin{cases} m_2 \text{ SCENDE} \\ m_1 \text{ SALE} \end{cases}$

ALLORA IL SEGNO PER L'ATTRITO È : $\ominus$.

E L'EQ. GENERALE È :

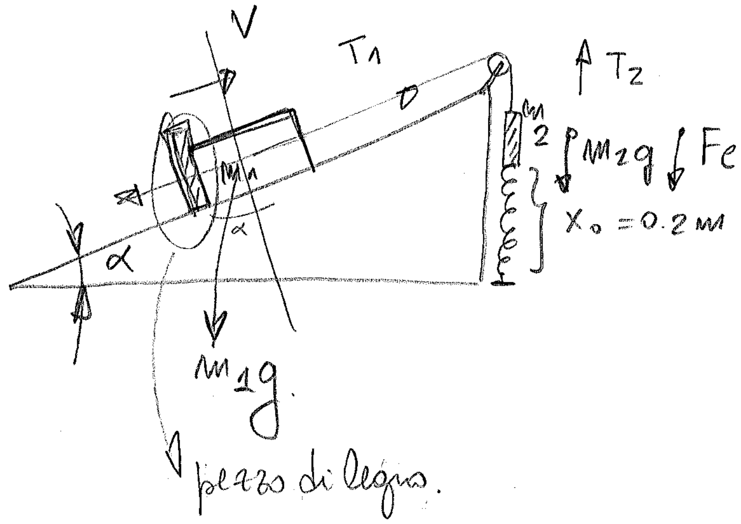
$$g\,m_2 - g\,m_1 \sin\alpha - F_{att} = (m_1+m_2)\,a$$

$$a = \frac{g}{(m_1+m_2)}\left\{m_2 - m_1 \sin\alpha - m_1 \mu_d \cos\alpha\right\}$$

$$a = \frac{g}{15\,kg}\left\{10\,kg - 5\,kg\,\frac{1}{2} - 5\,kg\;0.3\;\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$$\boxed{a \cong 4{,}05\,\frac{m}{s^2}}$$

5)



il sistema non si muove $\Rightarrow a = 0$

$$[A] \begin{cases} -m_1 g \sin\alpha + V + T_1 = m_1 a \\ m_2 g + F_e - T_2 = m_2 a \end{cases} \Rightarrow \boxed{T_2 = m_2 g + F_e}$$

$k x_0$

Tensione del Filo

[B]

$\boxed{T_1 = T_2}$ [B] → [A] $\Rightarrow -m_1 g \sin\alpha + V + m_2 g + F_e = 0$

$$\boxed{V = m_1 g \sin\alpha - m_2 g - F_e}$$

✓

questa è la forza che fa il pezzo di legno

REAZIONE VINCOLARE DELL'APPOGGIO

METTENDO I NUMERI :

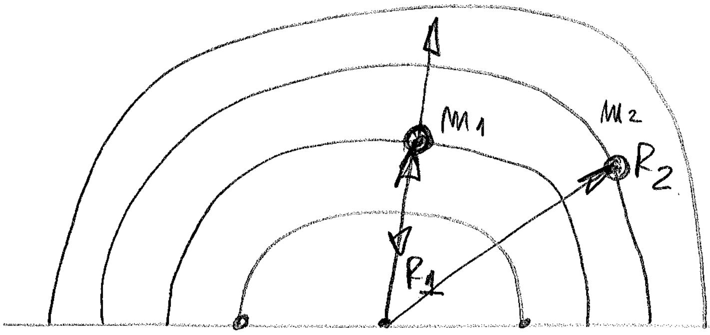
$$T_1 = T_2 = 2\,kg \times 9.8\,\frac{m}{s^2} + 100\,\frac{N}{m}\,0.2\,m$$

$$\boxed{T_1 = T_2 = 39{,}6\,N} = T$$

$$\boxed{V = m_1 g \sin\alpha - T = 14\,kg \times 9.8\,\frac{m}{s^2} \times \frac{1}{2} - T = 29\,N}$$

E' Parallela al Piano inclinato, E VERSO L'ALTO.

6. DUE AUTOMOBILI



Il caso limite è quello dove la forza dovuta al moto circolare è eguale a quella ~~dell'attrito~~. DELL'ATTRITO

accelerazione:

centripeta: $\boxed{a_c = \frac{v^2}{R}}$

Tangenziale: $\boxed{a_T = \dot{\omega} R}$

$$\boxed{a_c^i \cancel{m_i} = \mu_s \cancel{m_i} g \quad / \ i = 1,2.}$$

$$\frac{v_i^2}{R_i} = \mu_s g$$

velocità massima della macchina.

$$\boxed{v_i = \sqrt{\mu_s g R_i}}$$

$\boxed{v_1 = 25,53 \, m/s}$

$\boxed{v_2 = 26,84 \, m/s}$

$$v_i = \omega_i R_i \Rightarrow \boxed{\frac{v_i}{R_i} = \omega_i}$$

$$\varphi_i = \omega_i t$$

$$\boxed{\frac{\pi}{\omega_i} = t_i}$$

Per vedere chi arriva prima al termine della curva, calcolo il tempo che ci mette una macchina per fare un angolo π

$$\boxed{\frac{\pi R_i}{v_i} = t_i}$$

$\boxed{t_1 = 11,69 \, s}$

$\boxed{t_2 = 12,29 \, s}$