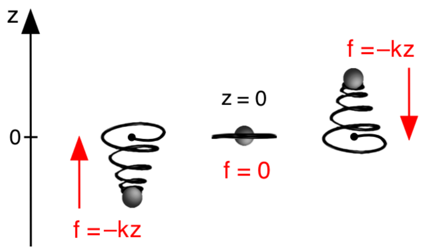
Oscillatori e forze centrali – G.B. Bachelet 2014



1. Oscillatore libero in una dimensione (1D)

La dipendenza dal tempo $z(t)$ della posizione z di una pallina di massa m soggetta alla sola "forza di richiamo" $f = -kz$ di una molla ideale (con lunghezza di riposo nulla: $f=0$ quando la pallina si trova nell'origine $z=0$) vincolata a muoversi su una guida rettilinea liscia, è governata dall'equazione differenziale lineare omogenea del 2º ordine a coefficienti costanti $m\ddot{z} = -kz$, dove $\ddot{z}$ è la derivata seconda della posizione z rispetto al tempo, cioè l'accelerazione. Tanto la massa m, quanto la costante elastica k (che ha le dimensioni di una massa per l'inverso del quadrato di un tempo), sono positive. Definita la costante positiva $\omega=\sqrt{k/m}$ (dimensioni: inverso di un tempo), otteniamo l'equazione differenziale

$$\ddot{z} = -\omega^2 z$$

che ammette soluzioni periodiche $z(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$ con periodo $T=2\pi/\omega$. Le due costanti arbitrarie di integrazione A e φ fissano ampiezza e fase dell'oscillazione, ovvero la posizione e la velocità a $t=0$: $z_o = A\cos\varphi$, $v_o = -\omega A\sin\varphi$. L'equilibrio statico corrisponde a posizione e velocità iniziali nulle: in tal caso la pallina rimane per sempre ferma in $z = 0$.

2. Oscillatore armonico pesante in 1D

Se la pallina, oltre che alla forza di richiamo, è soggetta anche alla forza peso $-mg$ (qui $g =$ costante positiva pari a 9.8 m/s^{-2}) diretta lungo z nel verso delle z negative, otteniamo la nuova equazione di Newton $f = -kz - mg$, ovvero $m\ddot{z} = -kz - mg$, che possiamo riscrivere come

$$\ddot{z} = -\omega^2\left[z + \frac{mg}{k}\right] = -\omega^2\left[z - z_{\text{equil}}\right]$$

dove $z_{\text{equil}} = -mg/k$ è la nuova posizione di equilibrio della pallina m quando, oltre che alla forza di richiamo della molla ideale, è soggetta anche alla forza di gravità (la somma di queste due forze fa zero per $z = z_{\text{equil}}$). La nuova variabile $u = z - z_{\text{equil}}$ ubbidisce all'equazione differenziale $\ddot{u} = -\omega^2 u$, la stessa cui obbediva z in assenza di gravità; pertanto la sua dipendenza dal tempo è $u(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$; in altre parole, la pallina oscilla con la stessa legge oraria di prima, ma stavolta attorno al punto $z_{\text{equil}} = -mg/k$ anziché attorno al punto $z=0$: $z(t) = u(t) + z_{\text{equil}} = A\cos(\omega t+\varphi) + z_{\text{equil}}$. L'equilibrio statico corrisponde a velocità iniziale nulla e posizione iniziale $z_o = -mg/k$, quella in cui la forza della molla e la forza peso della pallina si bilanciano perfettamente.

3. Oscillatore libero in 3D e momento angolare

In assenza di gravità (come al punto **1**) il moto di una pallina m, attaccata a una molla k (fissata all'altro capo nell'origine) libera di muoversi in tutte e tre le direzioni dello spazio anziché essere vincolata a una guida rettilinea, è governato dall'equazione vettoriale $\vec{f} = -k\vec{r}$, cioè

$$\ddot{\vec{r}} = -\omega^2\vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} = -\omega^2 x \ ; \ \ddot{y} = -\omega^2 y \ ; \ \ddot{z} = -\omega^2 z$$

(dove $\omega = \sqrt{k/m}$) le cui soluzioni, periodiche con periodo $T = 2\pi/\omega$, sono date da $x(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$, $y(t) = B\cos(\omega t+\chi)$ e $z(t) = C\cos(\omega t+\psi)$. La scelta delle 6 costanti di integrazione $A, B, C\,;\ \varphi, \chi, \psi$ (ovvero della coppia di vettori posizione e velocità iniziali $\vec{r_o}, \vec{v_o}$) fornisce ogni traiettoria possibile. Si vede subito che un sottoinsieme di esse (quando due delle tre ampiezze sono nulle, ad esempio $A \neq 0, B = C = 0$) coincide con le oscillazioni 1D del punto **1**; se invece due delle tre ampiezze non sono nulle e la terza è nulla (ad esempio $A\neq 0, B\neq 0, C=0$), otteniamo traiettorie piane che sono ellissi centrate nell'origine: in questo esempio giacciono nel piano xy (e per $A=B$ e $\chi=\varphi-\pi/2$ diventano circonferenze). Ma anche con condizioni iniziali del tutto generali la traiettoria della pallina attaccata alla molla resta nel piano inizialmente individuato da $\vec{r_o}, \vec{v_o}$. Per dimostrarlo, definiamo $\vec{p} = m\vec{v}$ "quantità di moto" e $\vec{\ell} = \vec{r}\times\vec{p}$ "momento della quantità di moto" o "momento angolare" rispetto all'origine ($\times$ è il simbolo del prodotto vettoriale). La derivata prima di $\vec{\ell}$ rispetto al tempo è $\dot{\vec{\ell}} = \dot{\vec{r}}\times m\vec{v} + \vec{r}\times m\dot{\vec{v}} = \vec{v}\times m\vec{v} + \vec{r}\times\dot{\vec{p}} = \vec{r}\times\dot{\vec{p}}$; ma $\dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a}$; sfruttando l'equazione di Newton $\vec{f} = m\vec{a}$ otteniamo alla fine $\dot{\vec{\ell}} = \vec{r}\times\vec{f}$, dove il secondo membro è il "momento della forza" rispetto all'origine. Tale momento, per la molla, è $\vec{r}\times(-k\vec{r}) = 0$; ne segue che $\dot{\vec{\ell}} = 0$, ovvero: il "momento angolare" della pallina rispetto all'origine $\vec{\ell} = \vec{r}\times\vec{p}$ è costante nel tempo. Ciò implica che il piano individuato dalla coppia dei vettori posizione e velocità della pallina è lo stesso in ogni punto della traiettoria. Quindi ogni traiettoria giace nel piano individuato dalle proprie condizioni iniziali $\vec{r_o}, \vec{v_o}$.