Oscillatore armonico smorzato: soluzione generale (G. B. Bachelet 2014)

Una massa attaccata a una molla e immersa in un mezzo viscoso è soggetta a una forza $F = -\beta\dot{x} - kx$. Grazie al secondo principio della dinamica $F = ma$ otteniamo la seguente equazione differenziale per $x(t)$:

$$F = ma \quad \rightarrow \quad -\beta\dot{x} - kx = m\ddot{x} \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$$

con m, β e k reali positivi. L'equazione caratteristica associata è $m\lambda^2 + \beta\lambda + k = 0$ e ha radici

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_o^2} = -p \pm i\omega_1,$$

dove ho definito tre nuove costanti, che hanno tutte dimensioni dell'inverso di un tempo: $\omega_o = \sqrt{k/m}$, reale positivo, pulsazione dell'oscillatore libero (cioè: dell'oscillatore armonico senza resistenza dell'aria, qui ottenuto per $\beta = 0$); $p = \beta/2m$, reale positivo; e infine $\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - p^2}$, che è reale se $p < \omega_o$, nullo se $p = \omega_o$, e immaginario puro ($\omega_1 = iq$ con q reale positivo) se $p > \omega_o$. Nel primo caso ($p < \omega_o$) le radici λ_1 e λ_2 sono complesse coniugate, nel secondo ($p = \omega_o$) reali coincidenti e nel terzo ($p > \omega_o$) reali e distinte. I tre casi corrispondono ai regimi *sottosmorzato*, *critico* e *sovrasmorzato* dell'oscillatore, a seconda che il rapporto fra la rapidità di smorzamento p e la pulsazione dell'oscillatore libero ω_o sia minore, uguale o maggiore di uno. Per ciascuno dei tre regimi posso ottenere separatamente, con tecniche standard, la soluzione generale $x(t)$ a partire da da λ_1 e λ_2. Alla fine di questo lavoro la posizione in funzione del tempo $t>0$ si può riassumere in un'unica formula, valida in tutti e tre i regimi:

$$x(t) = \left[x_o \cos(\omega_1 t) + \frac{1}{\omega_1}(v_o + p x_o)\sin(\omega_1 t)\right] e^{-pt}, \tag{1}$$

dove x_o e v_o sono posizione e velocità iniziali, valori assunti da $x(t)$ e $\dot{x}(t)$ per $t=0$; la velocità per $t>0$ è :

$$\dot{x}(t) = \left[v_o \cos(\omega_1 t) - \frac{1}{\omega_1}\left({\omega_o}^2 x_o + p v_o\right)\sin(\omega_1 t)\right] e^{-pt}.$$

Studiamo questa soluzione generale, valida in tutti i regimi. Per $\beta = 0$ non c'è smorzamento, $p = 0$ e $\omega_1 = \omega_o$; ritroviamo, giustamente, l'oscillatore armonico libero: $x(t) = [x_o \cos(\omega_o t) + (v_o/\omega_o)\sin(\omega_o t)]$. Per $\beta > 0$ (ovvero $\beta/2m = p > 0$), lo smorzamento c'è, e vengono fuori i tre casi detti prima, che qui elenco in ordine diverso:

1. $p < \omega_o$ (ovvero $\omega_o > p = \beta/2m$)

   oscillazioni *sottosmorzate*, esprimibili anche come $x(t) = Ae^{-pt}\cos(\omega_1 t + \varphi_0)$

2. $p > \omega_o$ (ovvero $\omega_o < p = \beta/2m$)

   oscillazioni *sovrasmorzate*, esprimibili anche (avendo definito $q = \sqrt{p^2 - \omega_o^2}$ reale positivo) come

   $$x(t) = \left[x_o \cosh(qt) + \frac{1}{q}(v_o + p x_o)\sinh(qt)\right] e^{-pt}, \tag{2}$$

   in quanto $\omega_1 = iq$ (vedi definizioni), $\sin(iqt) = i\sinh(qt)$, e $\cos(iqt) = \cosh(qt)$ (formule di Eulero).

3. $p = \omega_o$ (ovvero $\omega_o = p = \beta/2m$)

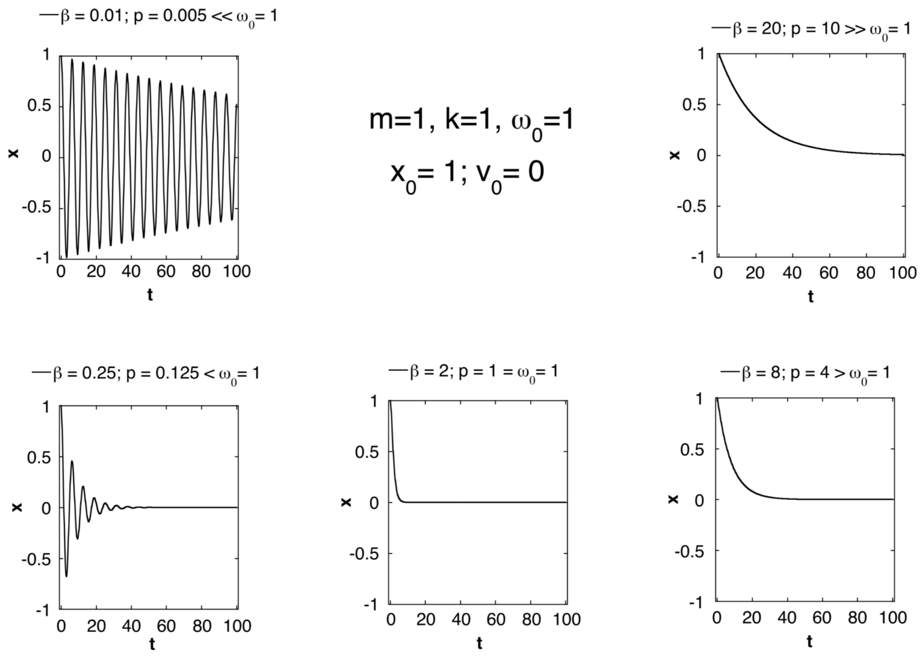
   in questo *regime critico* $\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - p^2} = 0$, e la formula riassuntiva (1) sembra non aver senso (c'è un ω_1 a denominatore); invece essa risulta corretta anche nel caso limite $p \to \omega_o$, cioè nel limite $\omega_1 \to 0$. Infatti:

   $$\lim_{\omega_1 \to 0} x(t) = \left\{x_o \lim_{\omega_1 \to 0} \cos(\omega_1 t) + \lim_{\omega_1 \to 0}\left[\frac{1}{\omega_1}(v_o + p x_o)\sin(\omega_1 t)\right]\right\} e^{-pt} = \left[x_o + (v_o + p x_o)\, t\right] e^{-pt}; \tag{3}$$

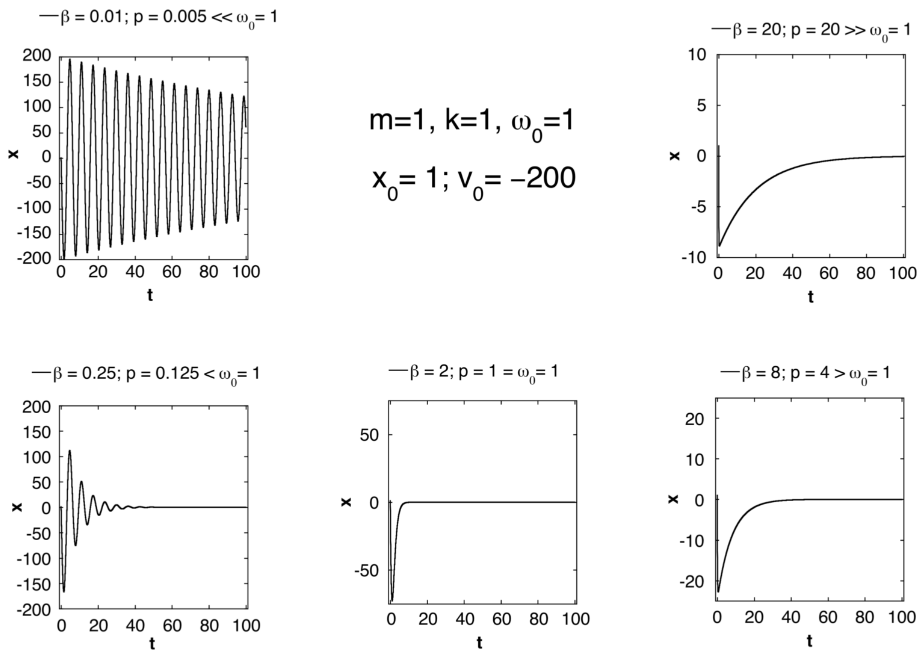
   questa stessa soluzione si otterrebbe osservando che per $p = \omega_o$ le due radici dell'equazione caratteristica risultano coincidenti, e trattando questo caso particolare secondo la teoria delle equazioni differenziali.

Due famiglie di soluzioni particolari al variare del mezzo viscoso: grafici

A questo punto può essere utile visualizzare la legge oraria del punto materiale al variare di β, coefficiente di resistenza del mezzo (con β varia $p = \beta/2m$), tenendo fissi massa e molla (per semplicità $m = 1$ kg, $k = 1$ kg s^{-2}, quindi è fissa anche $\omega_o = \sqrt{k/m} = 1\ \mathrm{s}^{-1}$). Nel primo pannello vediamo cinque grafici della posizione in funzione del tempo per cinque diversi valori di β corrispondenti a fluidi sempre piú viscosi, con condizioni iniziali di velocità $v_o = 0$ e posizione $x_o = 1\,\mathrm{m} > 0$. Osserviamo che in regime critico o sovrasmorzato il punto materiale, dopo un quarto di oscillazione, si ferma: partito ad una certa distanza ($x_o = 1$ m) dalla posizione di equilibrio con velocità iniziale $v_o = 0$, ritorna verso la posizione di equilibrio avvicinandosi sempre piú ad essa senza mai oltrepassarla.



Nel secondo pannello vediamo cinque grafici della posizione in funzione del tempo in corrispondenza degli stessi cinque valori di β corrispondenti a fluidi sempre piú viscosi, ma qui la velocità iniziale, anziché nulla, è grande in modulo e di segno opposto alla posizione (quindi diretta verso l'origine). Osserviamo che per i grafici relativi al regime sottosmorzato la differenza con il pannello precedente non si apprezza facilmente a occhio, mentre i grafici relativi al regime critico o sovrasmorzato appaiono a prima vista diversi da quelli del pannello precedente: qui infatti il punto materiale, grazie alla forte velocità iniziale, riesce ad raggiungere la posizione di equilibrio, a oltrepassarla continuando a muoversi nello stesso verso fino a perdere del tutto velocità (fermandosi in un punto $x < 0$ che si trova dal lato opposto rispetto alla posizione iniziale $x_o = 1 > 0$) e quindi a invertire il moto, che da questo istante in poi, per ovvie ragioni, si riconduce al caso precedente (il punto parte a velocità nulla e si avvicina indefinitamente all'origine, stavolta per valori negativi $x < 0$, senza piú oltrepassarla).



Regime critico e regime sovrasmorzato

Partiamo dal regime sovrasmorzato. L'equazione differenziale è $m\ddot{x} = -\beta\dot{x} - kx$ con m, β e k positivi, e sono reali positivi anche $\omega_o = \sqrt{k/m}$ (pulsazione dell'oscillatore libero), $p = \beta/2m$ (che nel regime sovrasmorzato è $p > \omega_o$) e $q = \sqrt{p^2 - \omega_o{}^2}$. Come abbiamo già visto, esplicitando le condizioni iniziali x_o e v_o, la soluzione generale dell'equazione differenziale in questo regime si può convenientemente scrivere come:

$$x(t) = \left[x_o \cosh(qt) + \frac{1}{q}(v_o + px_o)\sinh(qt)\right]e^{-pt},$$

$$\dot{x}(t) = \left[v_o \cosh(qt) - \frac{1}{q}\left(\omega_o{}^2 x_o + pv_o\right)\sinh(qt)\right]e^{-pt}.$$

- *Se x_o e v_o hanno segno opposto e* $|v_o/x_o| > p + q$, il punto materiale, partito a $t=0$ in x_o con velocità v_o, raggiunge l'origine $x=0$ per $t < \infty$: per l'esattezza, la raggiunge nell'istante

  $$t = t_1 = \frac{1}{q}\coth^{-1}\left[\frac{1}{q}\left(\left|\frac{v_o}{x_o}\right| - p\right)\right] = \frac{1}{2q}\ln\left(\frac{\left|\frac{v_o}{x_o}\right| - p + q}{\left|\frac{v_o}{x_o}\right| - p - q}\right)$$, oltrepassandola a velocità

  $$v_1 = \dot{x}(t_1) = -x_o\frac{\left(\left|\frac{v_o}{x_o}\right| - p - q\right)^{\frac{p}{2q}+\frac{1}{2}}}{\left(\left|\frac{v_o}{x_o}\right| - p + q\right)^{\frac{p}{2q}-\frac{1}{2}}}$$, e proseguendo la sua corsa finché, all'istante

  $$t_2 = t_1 + \frac{1}{2q}\ln\left(\frac{p+q}{p-q}\right),$$

  si arresta [$\dot{x}(t_2) = 0$], invertendo il moto e tornando verso l'origine, che raggiungerà di nuovo (asintoticamente, senza piú oltrepassarla) per $t \to \infty$. Infatti $x(t)$, a parte il fattore globale e^{-pt} sempre positivo (p e t sono reali), è una combinazione lineare $A\cosh(qt) + B\sinh(qt)$ con coefficienti reali A e B, che, per q reale, non può avere piú di uno zero a t finito, qualunque siano le costanti reali A e B. Il punto di elongazione massima sul versante opposto rispetto alla x_o di partenza corrisponde all'istante nel quale s'inverte il moto, ed è $x(t_2) = v_1/\omega_o$. Dopo l'inversione della velocità il punto ritornerà verso l'origine avvicinandosi sempre piú, senza mai oltrepassarla.

- *Se x_o e v_o hanno lo stesso segno, oppure hanno segno opposto ma* $|v_o/x_o| \leq p + q$, allora il punto materiale parte da x_o e raggiunge l'origine una sola volta, per $t \to \infty$, senza mai oltrepassarla.

- *In conclusione* il caso sovrasmorzato e il caso critico (diversamente da quanto sembra suggerire il testo di S. Focardi, I. Massa e A. Uguzzoni) hanno un comportamento qualitativamente identico: a seconda del segno relativo di posizione e velocità iniziale, tanto nel regime critico [equazione (3), prima pagina], quanto nel regime sovrasmorzato [equazione (2), prima pagina], il punto compie un quarto di oscillazione o tre quarti di oscillazione e poi si avvicina esponenzialmente e definitivamente al punto di equilibrio senza piú oltrepassarlo, come conferma il confronto fra il caso $p=1$ (regime critico) e i casi $p=4$ e $p=10$ (regime sovrasmorzato) mostrati nei grafici.

Rimane invece vero, e anche qui i grafici aiutano a vederlo, che nel regime critico il tempo di ritorno (definitivo) all'equilibrio è piú breve che in qualsiasi caso sovrasmorzato.

Oscillatore forzato e smorzato

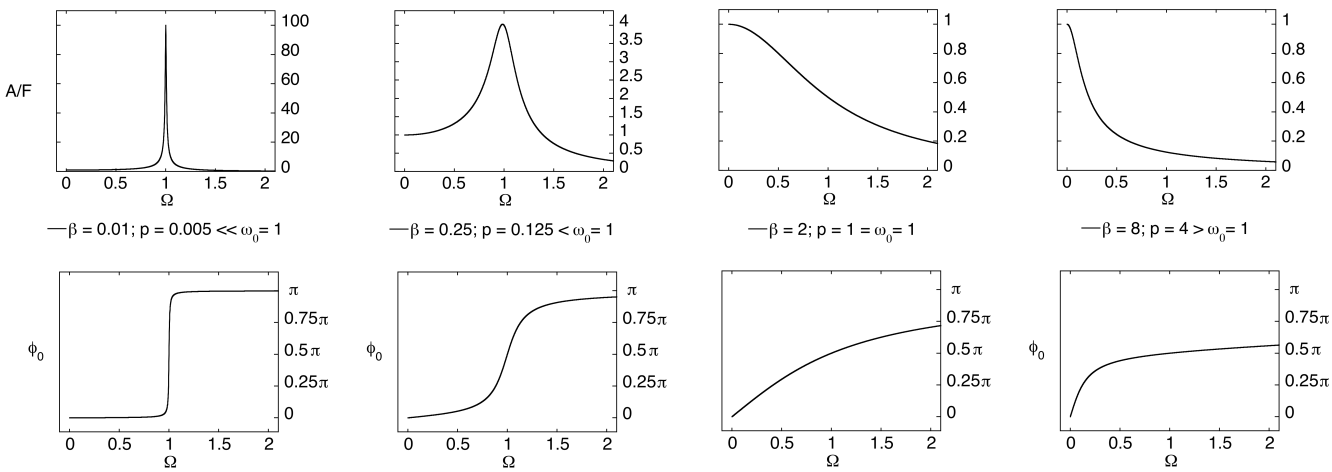
Il moto (unidimensionale: ci limitiamo al caso in cui la massa può muoversi solo lungo l'asse x) di un punto materiale di massa m, soggetto (a) alla forza di richiamo di una molla, (b) alla resistenza dell'aria (o altro mezzo viscoso) e (c) ad una forza esterna periodica nel tempo, ubbidisce all'equazione differenziale non omogenea del second'ordine

$$m\ddot{x} = -\beta\dot{x} - kx + F\cos\Omega t \quad \text{ovvero} \quad m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F\cos\Omega t$$

la cui soluzione, in *regime stazionario*, è data da:

$$x(t) = A\cos\left(\Omega t - \varphi_o\right) \quad \text{con} \quad A = \frac{F}{\sqrt{\left(k - m\Omega^2\right)^2 + \beta^2\Omega^2}} \quad \text{e} \quad \varphi_o = \text{arctg}\left(\frac{\beta\,\Omega}{k - m\Omega^2}\right). \tag{4}$$

A questo *regime stazionario*, periodico, si perviene dopo un *regime transitorio*, non periodico, che dipende dalle condizioni iniziali; matematicamente ciò corrisponde al fatto che la soluzione generale di un'equazione differenziale non omogenea del second'ordine (nel nostro caso $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F\cos\Omega t$) si può esprimere come combinazione lineare di una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea, nel nostro caso la $x(t)$ dell'equazione (4), e della soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea associata (nel nostro caso $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$, oscillatore smorzato, la cui soluzione generale, equazione (1), contiene due costanti determinate dalle condizioni iniziali). La soluzione e i vari regimi periodici possibili, nonché il notevole fenomeno della *risonanza*, che si verifica quando il valore della pulsazione Ω della forza periodica applicata è vicino a quello della pulsazione "naturale" $\omega_o = \sqrt{k/m}$ dell'oscillatore libero associato, sono discussi in tutti i testi di Fisica Generale. Qui sotto ci limitiamo a mostrare quattro coppie di grafici nei quali, tenendo fissi per semplicità $m = 1$ kg, $k = 1$ kg s^{-2} (e quindi anche $\omega_o = \sqrt{k/m} = 1$ s^{-1}), sono illustrate quattro situazioni possibili al variare di β, coefficiente di resistenza del mezzo, ovvero di $p = \beta/2m$): regime sottosmorzato con pochissimo ($p << \omega_o$) o poco ($p < \omega_o$) smorzamento, regime critico $p = \omega_o$, regime sovrasmorzato $p > \omega_o$. Unità di misura: $[\Omega] = \text{s}^{-1}$, $[A/F] = \text{kg}^{-1}\text{s}^2$; Φ_O è un angolo, in radianti.



Esercizio

Sulla base della definizione di lavoro di una forza, che in una sola dimensione si riduce all'integrale $L_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} f(x)dx$, fornire l'espressione del lavoro compiuto in un periodo $T = 2\pi/\Omega$, cioè $L = \int_{x(t)}^{x(t+T)} f(x)dx$

1. dalla forza di richiamo della molla $f_{\text{molla}} = -kx$

2. dalla forza di resistenza dell'aria $f_{\text{aria}} = -\beta\dot{x}$

3. dalla forza esterna periodica $f_{\text{esterna}} = F\cos\Omega t$

Dopo aver risposto, commentare i risultati ottenuti.