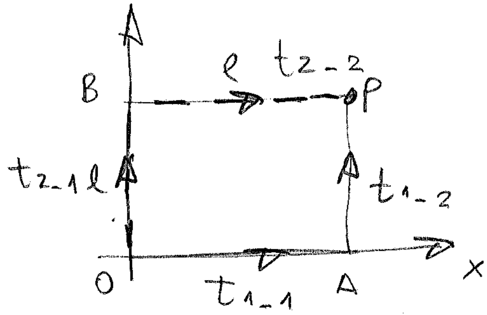
1. LAVORO



$$\vec{F} = axy\,\hat{x} - ax^2\,\hat{y}\,, \quad a = 60\,N/m^2$$

$$\begin{cases} x_P = \ell \\ y_P = \ell \end{cases}$$

$d\vec{r} = dx\,\hat{x}$ → spostamento infinitesimo

$$L_{t_{1-1}} = \int_O^A \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{\ell} axy\,dx = 0 \qquad (y=0)$$

$$L_{t_{1-2}} = \int_A^P \vec{F}\cdot \underbrace{d\vec{r}}_{=dy\,\hat{y}} = -\int_0^{\ell} ax^2\,dy \underset{x=\ell}{=} -a\ell^2\,y\Big|_0^{\ell} = -a\ell^3$$

$$\boxed{L_{t_{1-TOT}} = -a\ell^3}$$

$$L_{t_{2-1}} = \int_O^B \vec{F}\cdot \underbrace{d\vec{r}}_{dy\,\hat{y}} = -a\int_0^{\ell} \underbrace{x^2}_{x=0} dy = 0$$

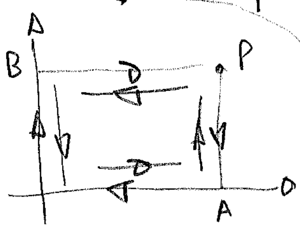
$$L_{t_{2-2}} = \int_0^{\ell} ax\underbrace{y}_{y=\ell}\,dx = a\ell\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\ell} = a\,\frac{\ell^3}{2}$$

$$\boxed{L_{t_{2-TOT}} = a\,\frac{\ell^3}{2}}$$

percorso d'integrazione chiuso.

Il Lavoro dipende dalla traiettoria ⇒ è non conservativo:

$$\Rightarrow \left|\oint \vec{F}\cdot d\vec{r}\right| = \left|L_{t_{1-TOT}} - L_{t_{2-TOT}}\right| \neq 0$$



il senso del percorso non importa qui

Se il percorso è chiuso, il lavoro di una forza conservativa risulta nullo!

Cambio di senso per il percorso 2

il rotore deve essere nullo se la forza è conservativa :

$$\bar{\nabla} \times \bar{f} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ axy & -ax^2 & 0 \end{vmatrix} = 0\,\hat{i} + 0\,\hat{j} + (-2ax - ax) = -3ax \neq 0.$$

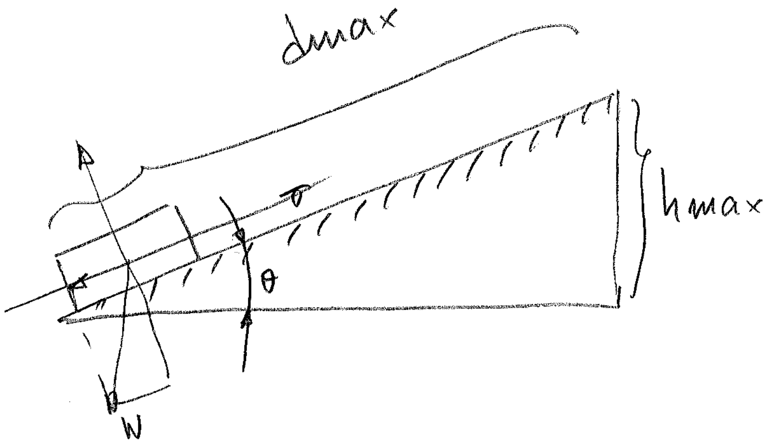
quindi questo vuol dire che $\vec{f}$ non può essere scritta come il gradiente di un potenziale $\vec{f} \neq -\bar{\nabla} V(x,y,z)$

Non esiste un potenziale $V \,/\, \vec{f} = -\bar{\nabla} V(x,y,z)$

$\boxed{\text{Questa è altra forma di provare che } \vec{F} \text{ è non conservativa}}$

---

2) Lavoro attrito, piano inclinato



$$\boxed{\sin\theta = \frac{h_{max}}{d_{max}} \Rightarrow d_{max} = \frac{h_{max}}{\sin\theta}}$$

$$\boxed{\Delta E_M = L^{NC}}$$ → le differenze di energia meccanica è il lavoro delle forze non conservative.

$$\Delta E_M = E_M^f - E_M^0$$

$$E_M^f = \frac{1}{2} m \underbrace{v_f^2}_{=0} + mgh_{max} = mgh_{max}$$

quando si ferma.

$$E_M^0 = \frac{1}{2} m v_0^2 + mg \overbrace{h_0}^{=0} = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\Delta E_M = mgh_{max} - \frac{1}{2} m v_0^2$$

Solo metto l'attrito che è non conservativo

$$L^{NC} = \int_0^{d_{max}} \vec{F}_{att} \cdot d\vec{r} = \int_0^{d_{max}} -mg\cos\theta\,\mu_d\,dx = -mg\cos\theta\,\mu_d\,d_{max}$$

il peso è conservativo ⇒ non lo metto!!

$$L^{att} = L^{NC} = -mg\cos\theta\,\mu_d\,\frac{h_{max}}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta E_M = L^{NC}} \Rightarrow mgh_{max} - \frac{1}{2} m v_0^2 = -mg\cos\theta\,\mu_d\,\frac{h_{max}}{\sin\theta}$$

se $g^* = g(\sin\theta + \mu_d\cos\theta)$

$$\cancel{m}g\,\frac{h_{max}}{\sin\theta}(\sin\theta + \mu_d\cos\theta) = \frac{1}{2}\cancel{m} v_0^2$$

$$\boxed{h_{max} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin\theta}{g^*}}$$

E ovviamente si trova lo stesso con cinematica

$$v(t) = v_0 + at$$ $\boxed{\text{nel nostro caso: } -g^* = a.}$

$$v(t_f) = v_0 - g^* t_f = 0 \Rightarrow \boxed{t_f = \frac{v_0}{g^*}}$$

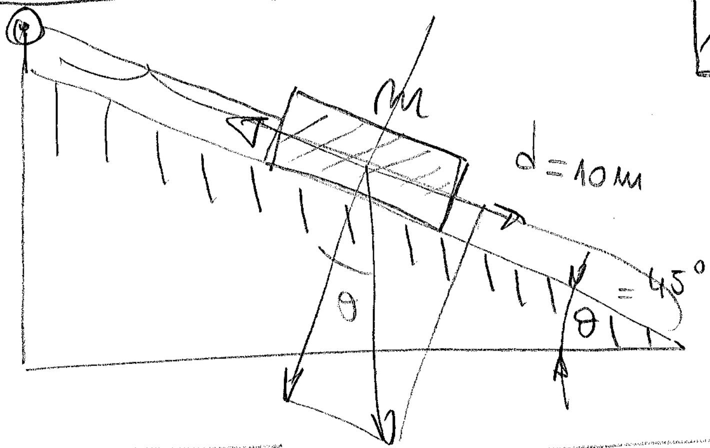
$$x(t) = v_0 t - \frac{g^*}{2} t^2$$

$$\boxed{x(t_f) = v_0 t_f - \frac{g^*}{2} t_f^2 = d_{max}}$$

$$\frac{h_{max}}{\sin\theta} = \frac{v_0^2}{g^*} - \frac{\cancel{g^*}}{2}\frac{v_0^2}{g^{*\cancel{2}}} = \frac{v_0^2}{2g^*} \Rightarrow \boxed{h_{max} = \frac{v_0^2 \sin\theta}{2g^*}}$$

✓

3) Lavoro, attrito, piano inclinato 2



$\mu_d = 0.3$

Lavoro della Forza di attrito ??

$$\vec{F} = -mg(\sin\theta + \mu_d \cos\theta)$$

Se la velocità è costante => $a = 0$

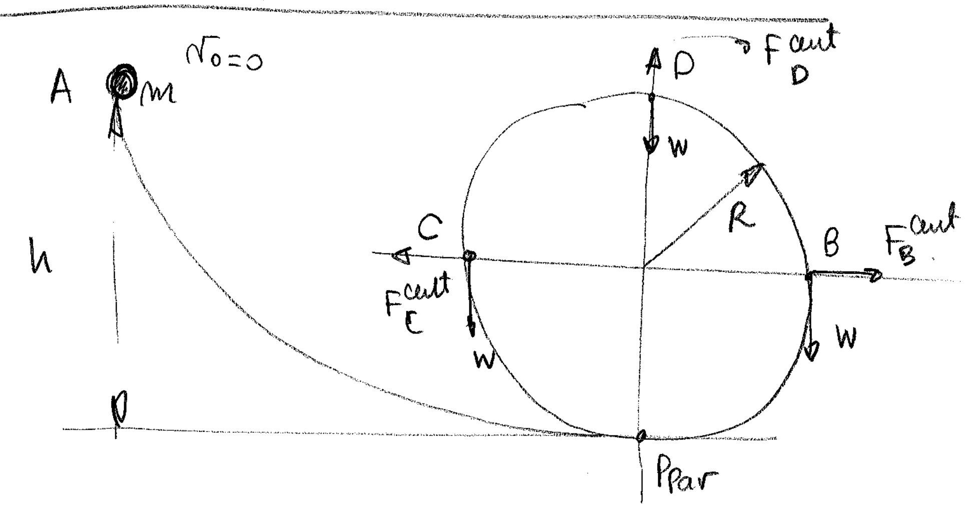
$v = cte \Rightarrow a = 0 \Rightarrow |F_{\text{dobbiamo che fare}}| = |\vec{F}|$

$$\vec{F}_{\substack{\text{dobb}\\ \text{fare}}} = -\vec{F}$$

$$L_{att} = \int_0^d \vec{F}_{att} \cdot \underbrace{d\vec{r}}_{dx\,\hat{x}} = \int_0^d -mg\cos\theta\,\mu_d\,dx = -mg\cos\theta\,\mu_d\,d.$$

$$L_{TOT\,F_{\substack{\text{dobb}\\ \text{fare}}}} = +mg(\sin\theta + \mu_d\cos\theta)\,d$$

4) CONSERVAZIONE, ENERGIA E MOTO CIRCOLARE



Qua non c'è attrito o altra forza non conservativa $\Rightarrow \Delta E_M = 0$.

$$\Delta E_M = E_M^f - E_M^0 \Rightarrow \quad E_M^f = E_M^{Ppav} = \frac{1}{2} m v_{Ppav}^2 + mg \underbrace{h_{Ppav}}_{=0} = \frac{1}{2} m v_{Ppav}^2.$$

$$E_M^0 = E_M^A = \frac{1}{2} m \underbrace{v_0^2}_{=0} + mgh = mgh.$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{Ppav} = \sqrt{2gh}}$$

Ora, se non voglio lasciare staccare alla massa, deve succedere che:

$$F_D^{cent} > W \Rightarrow \quad \frac{\cancel{m} v_D^2}{R} > \cancel{m} g \Rightarrow \boxed{v_D > \sqrt{gR}}$$

E devo collegare ora questa situazione con il punto Pavimento: Ppav.

$\Delta E_M = 0$ (Tra il Ppav e il punto D)

$$\Delta E_M = 0 = E_M^D - E_M^{Ppav} = \frac{1}{2} m v_D^2 + 2mgR - \frac{1}{2} m v_{Ppav}^2$$

$$\frac{1}{2} v_D^2 = -2gR + gh$$

$$\boxed{v_D = \sqrt{2g(h-2R)}}$$

$\Rightarrow$ usando che $v_D > \sqrt{gR} \Rightarrow \quad 2\cancel{g}(h-2R) > \cancel{g}R \Rightarrow \boxed{h > \frac{5}{2}R}$

Adesso dobbiamo calcolare la velocità nel punto B e C:

$$\Delta E_M = 0 = E_M^{B} - E_M^{Ppar} = \frac{1}{2} m v_B^2 + mgR - \frac{1}{2} m v_{Ppar}^2$$

Fra il punto Ppar e B

$$\Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{2g(h-R)}} \Rightarrow F_B^{cent} = \frac{m v_B^2}{R}$$

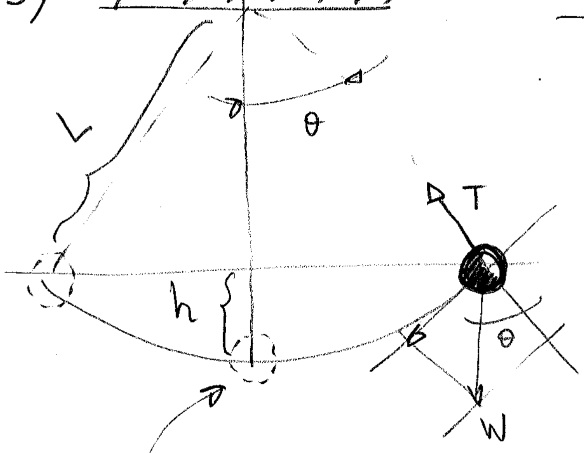
$$\boxed{F_B^{cent}\left(h = \frac{5}{2}R\right) = 3mg.}$$

E lo stesso per il punto C $\Rightarrow \boxed{v_C = \sqrt{2g(h-R)}} \Rightarrow F_C^{cent} = \frac{m v_C^2}{R}.$

$$\boxed{F_C^{cent}\left(h = \frac{5}{2}R\right) = 3mg}$$

La forza Totale (modulo) sarà: $\boxed{F_{TOT} = \sqrt{(mg)^2 + (3mg)^2} = \sqrt{10}\, mg}$

5) TENSIONE DEL PENDOLO



$v_0 = v(\theta)\big|_{\theta=0} = \sqrt{3gL}$

SE $\theta > \frac{\pi}{2}$, e la v_0 non è quella sufficiente per fare il giro completo (o della morte) non sarà possibile per il filo rimanere teso.

<u>Vediamo:</u>

Voglio vedere (calcolare) il θ per il quale si ferma: $v(\theta)=0$.

$\Delta E_M = 0$ non ci sono forze non conservative.

$E_M^0 = E_M(\theta=0) = \frac{1}{2} m v_0^2 + mg \underbrace{h_0}_{=0} = \frac{1}{2} m v_0^2$

$E_M^f = E_M(\theta) = \frac{1}{2} m v(\theta)^2 + mg h_f = mg h_f + \frac{1}{2} m v(\theta)^2$

$$\boxed{h_f = h(\theta) = L - L\cos\theta = L(1-\cos\theta)}$$

$\Rightarrow \Delta E_M = 0 \longrightarrow v(\theta) = \pm\sqrt{v_0^2 - 2gL(1-\cos\theta)}$ $\quad v_0 = \sqrt{3gL}$

$$\boxed{v(\theta) = \pm\sqrt{gL(1+2\cos\theta)}}$$

$v(\theta) = 0 \Rightarrow (1+2\cos\theta) = 0 \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{5}{6}\pi = 150°} > \pi/2.$

$$T = -\left[m \frac{v(\theta)^2}{L} + m g \cos\theta \right]$$

$$\boxed{T(\theta = \pi/2) = -\frac{m}{L} g L = -mg < 0}$$ ha il segno giusto.

$$\boxed{T(\theta = \tfrac{5}{6}\pi) = -mg \cos(\tfrac{5}{6}\pi) > 0}$$ ha il segno verso il filo quindi non rimane teso.

Infatti:

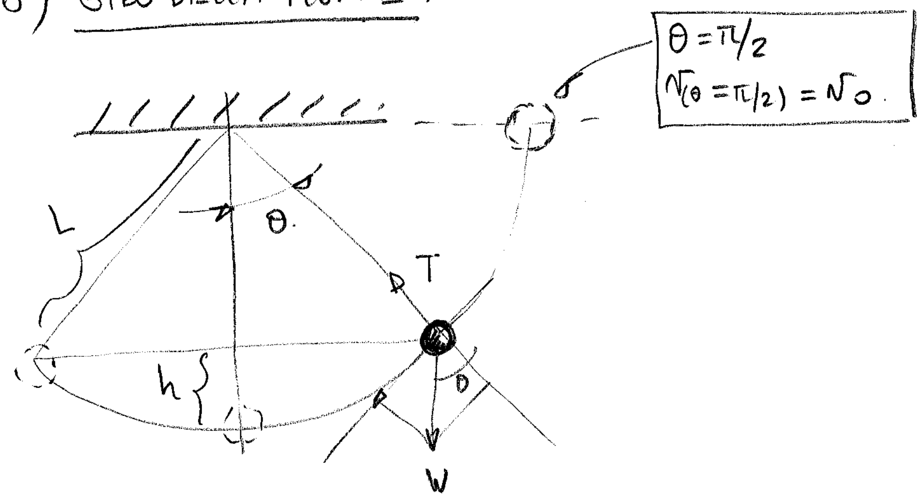
$$T(\theta) = -\frac{m}{L} g L (1 + 2\cos\theta) - mg\cos\theta$$

$$= -mg(1 + 3\cos\theta)$$

il cambio di segno succede quando $\boxed{\theta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \sim 109^\circ}$

Quindi questo vincolo è più forte. Qua finisce il problema, perché il calcolo che abbiamo fatto con $v(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 150^\circ$ succede dopo...

6) GIRO DELLA MORTE!



→ PER NON FARE cadere alla pallina verso il basso, nel punto più alto deve succedere:

$$\boxed{|F^{cent}_{P.più alto}| > |W_{pallina}|}$$

$$\frac{\cancel{m}\, v^2_{P.più alto}}{L} > \cancel{m} g$$

$$\boxed{v_{P.alto} > \sqrt{gL}}$$

Nel esercizio 5 abbiamo visto che l'altezza della pallina è: $\boxed{h(\theta) = L(1-\cos\theta)}$

Per collegare $h(\theta)$ con v_0 $(v(\theta=\pi/2) = v_0)$ dobbiamo fare:

La velocità nel punto più alto è:

$$\Delta E_M = 0 = \frac{1}{2} m v^2(\theta)\Big|_{\theta=\pi} + mg\,2L - \frac{1}{2} m v_0^2 - mgL = 0$$

$$\left[v^2(\theta)\Big|_{\pi=\theta} = v_0^2 - gL \right] \Rightarrow \quad v_0^2 - gL > gL$$

$$\boxed{v_0 > \sqrt{2gL}}$$

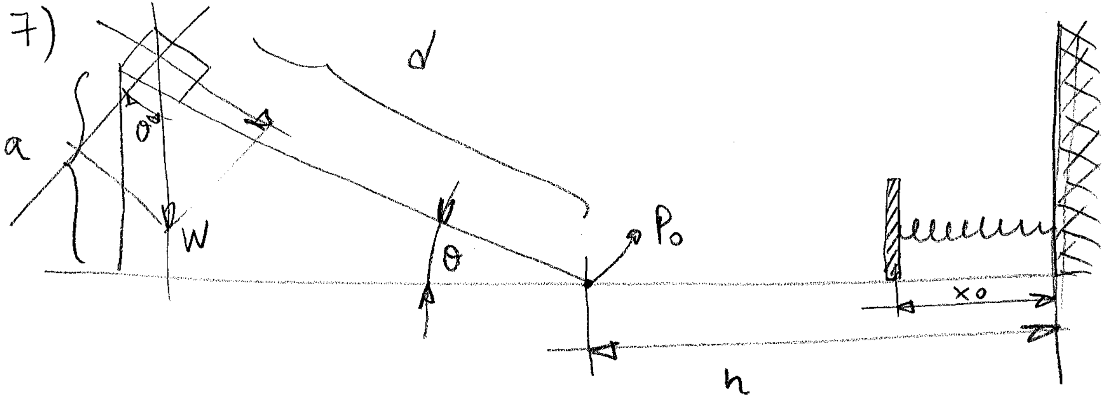
Condizione giro della morte

Per calcolare l'altezza in funzione di v_0, facciamo:

$$\Delta E_M = 0 = \frac{1}{2} m v(0)^2 + m g h(0) - \frac{1}{2} m v_0^2 - m g L = 0.$$

$$\boxed{h(0) = \frac{1}{2g}\left(v_0^2 - v(0)^2\right) + gL.}$$

7)



$$\boxed{a = d \sin\theta}$$

Nel caso senza attrito abbiamo:

Fra l'inizio e il Punto P_0

$$\Delta E_M = 0 = \frac{1}{2} m v_0^2 - m g a = 0 \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{2ga}}$$

Non ci sono forze non conservative

Velocità sul piano orizzontale.

Quindi, senza attrito arriva alla molla con $v_f = v_0$.

$$\Rightarrow \quad \Delta E_M = 0 = \frac{1}{2} k x_0^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = 0 \Rightarrow \boxed{k = m \frac{v_0^2}{x_0^2}}$$

Fra $x=0$ e $x=x_0$.

Nel caso con attrito abbiamo: (qua μ_d è dato)

$$\Delta E_M = L^{NC} = \int_0^h -mg\mu_d \, dx = -mg\mu_d h.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} k x_0^2 - \frac{m}{2} v_0^2 = -mg\mu_d h$$

$$\boxed{k = \frac{m v_0^2}{x_0^2} - 2mg\frac{\mu_d h}{x_0^2}}$$

Per arrivare alla molla con velocità zero si deve fare:

qua μ_d si deve calcolare

$$\Delta E_M = L^{NC} = -\int_0^{h-x_0} m g \mu_d \, dx = -m g \mu_d (h-x_0)$$

$$\Delta E_M = \underbrace{E_M^f}_{=0} - E_M^0 = \cancel{-}\frac{1}{2}\cancel{m} v_0^2 = \cancel{-}\cancel{m} g \mu_d (h-x_0)$$

$$\boxed{\mu_d = \frac{v_0^2}{2g}\frac{1}{(h-x_0)}}$$