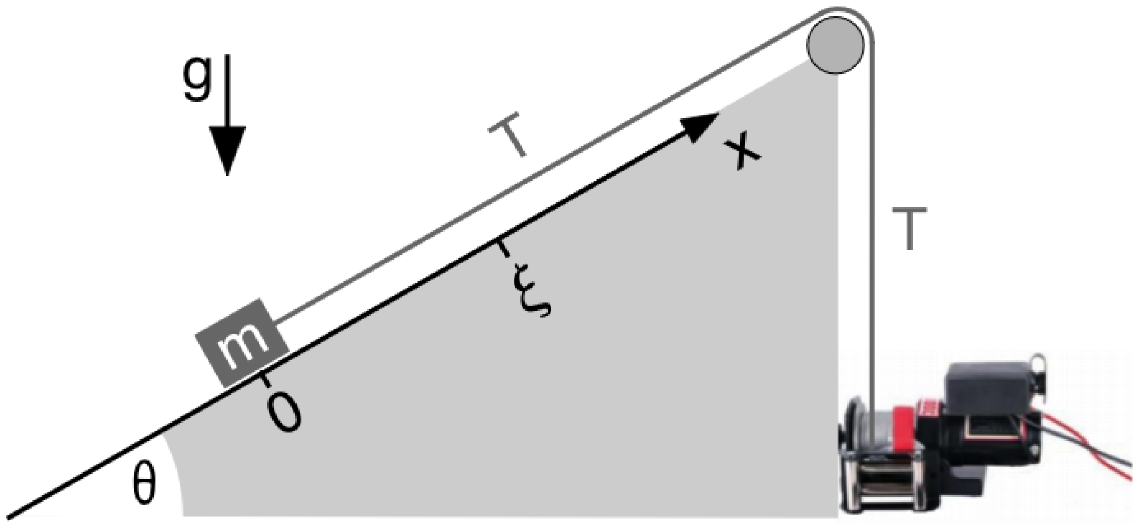
Gravità, reazione vincolare del piano inclinato e forza dipendente dal tempo

Fisica Generale I per Matematici, 22 ottobre 2014 (G. Bachelet)



Nell'intervallo di tempo fra $t\!=\!0$ a $t\!=\!\tau$ un blocchetto di massa m, soggetto alla forza peso $m\vec{g}$ e a quella di un motore elettrico $f(t)$ cui è collegato con un cavo di trazione (vedi figura), risale un piano liscio, inclinato di un angolo $0 < \theta < \pi/2$ con il piano orizzontale, con legge oraria

$$x(t) = \xi \cdot \left[\frac{t}{\tau} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)\right] .$$

Sapendo che ξ e τ sono costanti reali positive e tali che $g \sin\theta > 2\pi\xi/\tau^2$, determinare:

1. L'andamento nel tempo della risultante di tutte le forze che agiscono sul blocchetto.

2. L'andamento nel tempo della forza con cui il motore tira il cavo verso il basso.

3. L'andamento nel tempo della potenza sviluppata dal motore.

4. Il lavoro compiuto dal motore nell'intervallo fra la partenza ($t = 0$) e l'arrivo ($t = \tau$).

Rispondere infine a queste due domande:

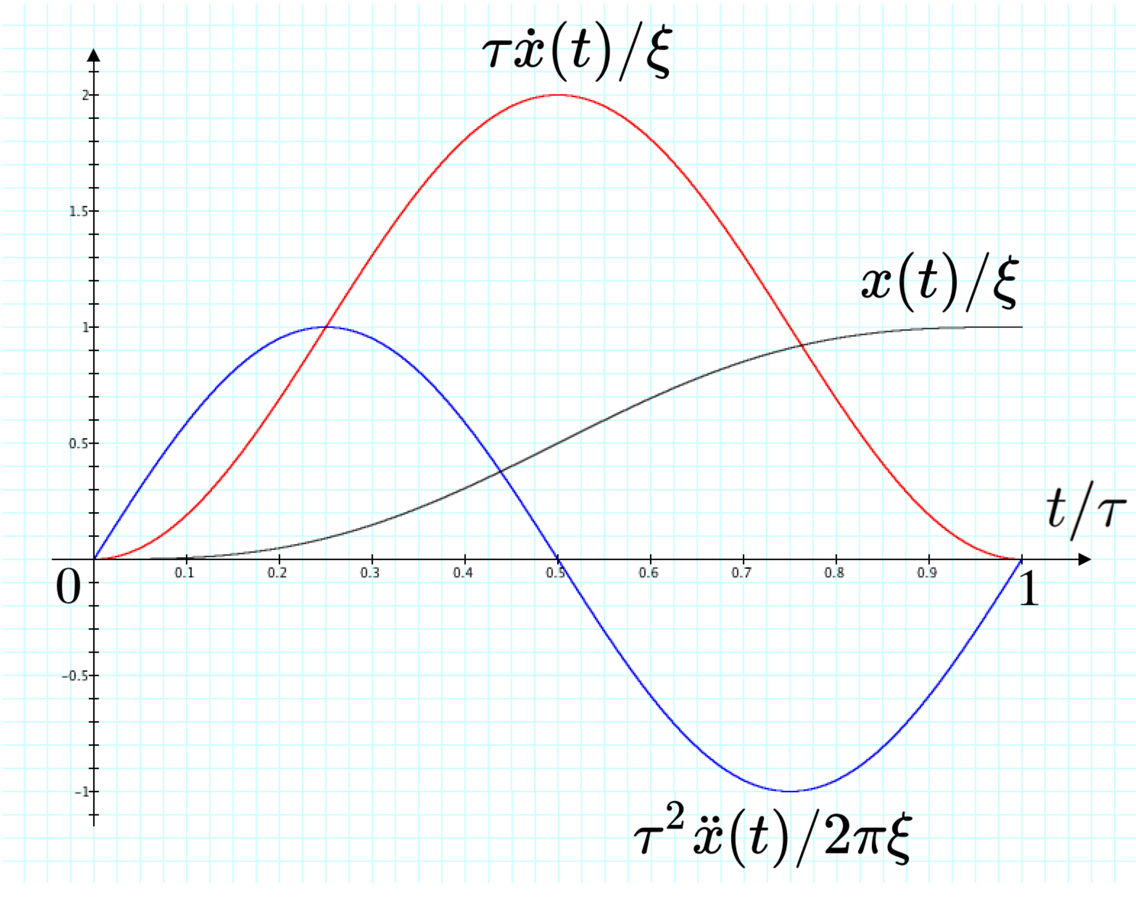
5. Il lavoro compiuto dal motore fra $t = 0$ e $t = \tau$ è uguale, maggiore o minore di quello compiuto dalla forza di gravità nello stesso intervallo di tempo? Motivare la risposta.

6. Quale problema è stato evitato imponendo la condizione $g \sin\theta > 2\pi\xi/\tau^2$?

1. La parte scalare dei vettori velocità e accelerazione del blocchetto, il cui versore $\hat{x}$ è parallelo al piano, si ottiene come derivata prima e seconda di $x(t)$ rispetto al tempo:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{\xi}{\tau}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)\right] \quad ; \quad \ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2\pi\xi}{\tau^2}\sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)$$

Il 2° principio della dinamica $\vec{f} = m\vec{a}$ afferma che $\vec{f}$, risultante di tutte le forze che agiscono sul blocchetto, è proporzionale all'accelerazione $\vec{a}$ del blocchetto tramite la sua massa m; il versore di $\vec{f}$ è dunque lo stesso di $\vec{a}$ (quindi $\hat{x}$) e la sua parte scalare è $f(t) = m\,\ddot{x}(t)$; come $\ddot{x}(t)$, anche $f(t)$ risulta, perciò, positiva nella prima metà del percorso ($t < \tau/2$), nulla a metà ($t = \tau/2$) e negativa da quel momento in poi e fino a $t = \tau$. [NB: Data la particolare legge oraria, benché il moto non sia uniforme, alla metà del tempo $\tau/2$ corrisponde proprio la metà del percorso $\xi/2$.] In altre parole, nella prima metà del percorso la risultante tira il blocchetto verso l'alto: lo fa partire da fermo e gradualmente fa aumentare la sua velocità mentre sale. Nella seconda metà, invece, la risultante tira verso il basso: fa gradualmente perdere velocità al blocchetto che continua a salire, sí, ma sempre piú lentamente, finché, per $t = \tau$, si ferma.



2. La risultante delle forze sul blocchetto è somma della forza di gravità, della forza del motore che lo tira con il cavo e della reazione vincolare del piano. Dalla legge oraria del blocchetto (fornita dal testo) e dal 2° principio della dinamica discende inevitabilmente, come già visto, che accelerazione e risultante delle forze siano dirette come $\hat{x}$; conoscendo modulo direzione e verso della forza peso possiamo inoltre convincerci che, per via della reazione vincolare, sopravvive e contribuisce alla risultante delle forze soltanto la componente della forza peso parallela al piano (cioè $-mg\sin\theta$, dove il segno meno esprime il fatto che la componente della gravità parallela al piano tira il blocchetto verso il basso). In conclusione $m\,\ddot{x}(t) = f(t) = f_{\text{motore}}(t) - mg\sin\theta$, e quindi

$$\begin{aligned} f_{\text{motore}}(t) &= mg\sin\theta + f(t) = m[\,g\sin\theta + \ddot{x}(t)] = \\ &= A\Big[B + \sin\Big(\frac{2\pi t}{\tau}\Big)\Big]\,, \text{ con } A = \frac{2\pi m\xi}{\tau^2} \text{ e } B = \frac{g\tau^2 \sin\theta}{2\pi\xi}\ . \end{aligned}$$

[NB La condizione $g\sin\theta > 2\pi\xi/\tau^2$ garantita nel testo equivale a $B > 1$ e implica che la forza del motore sia sempre positiva: per qualunque t il motore tira verso il basso e la tensione sul cavo non si annulla.]

3. La potenza del motore è prodotto della sua forza per la velocità del blocchetto:

$$\begin{aligned} P_{\text{motore}}(t) &= \frac{\xi A}{\tau}\Big[B + \sin\Big(\frac{2\pi t}{\tau}\Big)\Big]\Big[1 - \cos\Big(\frac{2\pi t}{\tau}\Big)\Big] = \\ &= \frac{\xi A}{\tau}\Big[B + \sin\Big(\frac{2\pi t}{\tau}\Big) - B\cos\Big(\frac{2\pi t}{\tau}\Big) - \sin\Big(\frac{2\pi t}{\tau}\Big)\cos\Big(\frac{2\pi t}{\tau}\Big)\Big] \end{aligned}$$

4. Il lavoro L compiuto dal motore è l'integrale da $t = 0$ a $t = \tau$ di $P_{\text{motore}}(t)\,dt$. Tutte le funzioni trigonometriche, integrate su un periodo, danno zero; il primo termine, integrato in dt su un periodo τ, dà $L = \xi AB = mg\,\xi\sin\theta$. Ci si poteva arrivare anche senza calcoli, con il teorema delle forze vive (L è pari al guadagno di energia potenziale gravitazionale).

5. Il lavoro compiuto dal motore è (risposta precedente) $mg\,\xi\sin\theta$, pari all'energia gravitazionale guadagnata dal blocchetto quando viene innalzato di $\Delta z = \xi\sin\theta$, ovvero l'opposto del lavoro (resistente) compiuto dalla forza di gravità nello stesso intervallo di tempo. Cosí sull'intero percorso il lavoro della risultante delle forze agenti sul blocchetto (motore+gravità+reazione vincolare normale, quest'ultima non compie lavoro perché perpendicolare allo spostamento) è nullo, come era facile prevedere con il "teorema delle forze vive": l'energia cinetica è infatti la stessa (in particolare nulla) a inizio e fine percorso.

6. La condizione $g\sin\theta > 2\pi\xi/\tau^2$ equivale alla condizione $B > 0$ e garantisce che in tutto il periodo $0 < t < 2\pi\tau$ la tensione sul cavo non si annulli.