**Oscillatore armonico con smorzamento senza gravità. Soluzione.**

**1a** Rispetto all'origine il momento angolare iniziale $\vec{\ell}_o = \vec{\ell}(t=0)$ della pallina ha componenti $(0,0,mx_o v_{yo}) = (0,0,m\omega_1 R^2>0)$, quindi modulo $\ell_o = |\vec{\ell}_o| = m\omega_1 R^2$ e versore $\hat{\ell}_o = \vec{\ell}_o/\ell_o = (0,0,1)$, diretto come $+\hat{z}$.

**1b** La pallina è soggetta alla forza $\vec{f} = -k\vec{r} - \beta\vec{v}$, perciò la derivata temporale del vettore momento angolare è $d\vec{\ell}/dt = \vec{r}\times\vec{f} = -\beta\vec{r}\times\vec{v} = -(\beta/m)\vec{\ell}$. A $t=0$, in particolare, $d\vec{\ell}/dt = -\beta\vec{r}_o\times\vec{v}_o = -(\beta/m)\vec{\ell}_o$ : il suo modulo è $|d\vec{\ell}/dt| = |-(\beta/m)\vec{\ell}_o| = (\beta/m)\,\ell_o = \beta\omega_1 R^2$, mentre il suo versore è l'opposto del versore di $\vec{\ell}_o$, cioè $-(0,0,1)$.

**1c** Dalla risposta precedente [cioè $d\vec{\ell}/dt = -(\beta/m)\vec{\ell}$ ] si vede che la direzione del versore $\hat{\ell}$ del momento angolare è costante. Infatti, se la variazione nel tempo del vettore $\vec{\ell}$ è parallela al vettore $\vec{\ell}$ stesso, tale vettore, nel tempo, può allungarsi o accorciarsi (qui si accorcia), ma non cambiare direzione.

**1d** Viste le due risposte precedenti, la variazione del modulo è data dalla semplice equazione $d\ell/dt = -(\beta/m)\ell$ , che ha per soluzione $\ell(t) = \ell_o e^{-(\beta/m)t}$, dove $\ell_o = m\omega_1 R^2$. Dalla soluzione ottengo il valore numerico a $t = t_1$.

**2a** La traiettoria si mantiene nel piano $xy$: lungo $z$, la distanza del punto dall'origine, la velocità e la forza sono inizialmente nulle e restano tali per ogni $t>0$. Lo si poteva dedurre dal fatto che $\hat{\ell}=$ costante $=(0,0,1)$, o anche integrando l'equazione di Newton, che lungo $z$ fornisce la soluzione banale $z(t) = 0$ e lungo $x$ e $y$ la soluzione non banale delle altre due equazioni differenziali: $m\ddot{x} = -\beta\dot{x} - kx$, $m\ddot{y} = -\beta\dot{y} - ky$, cioè due oscillatori smorzati unidimensionali, identici e indipendenti fra loro. Dai dati verifico che (come diceva il testo) siamo nel regime sottosmorzato: $\sqrt{k/m} = \omega_o > \beta/2m$, $\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - (\beta/2m)^2}$ è reale positivo. Allora, in analogia con la soluzione fornita nella dispensino e riprodotta anche nel testo del problema, trovo posizione e velocità lungo $x$ e lungo $y$:

$$x(t) = \left[x_o \cos\omega_1 t + \left(v_{xo} + \frac{\beta x_o}{2m}\right)\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1}\right] e^{-\frac{\beta t}{2m}} \quad ; \quad y(t) = \left[y_o \cos\omega_1 t + \left(v_{yo} + \frac{\beta y_o}{2m}\right)\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1}\right] e^{-\frac{\beta t}{2m}}$$

$$\dot{x}(t) = \left[v_{xo} \cos\omega_1 t - \left({\omega_o}^2 x_o + \frac{\beta v_{xo}}{2m}\right)\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1}\right] e^{-\frac{\beta t}{2m}} \quad ; \quad \dot{y}(t) = \left[v_{yo} \cos\omega_1 t - \left({\omega_o}^2 y_o + \frac{\beta v_{yo}}{2m}\right)\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1}\right] e^{-\frac{\beta t}{2m}}$$

Se, prima di calcolare i valori numerici di posizione e velocità a $t=t_1$ , sostituisco le condizioni iniziali cosí come fornite nel testo, cioè $x_o = R, y_o = 0$ e $v_{xo} = -(\beta/2m)R, v_{yo} = \omega_1 R$, ottengo espressioni notevolmente semplificate:

$$x(t) = R\,e^{-\frac{\beta t}{2m}}\cos\omega_1 t \quad ; \quad y(t) = R\,e^{-\frac{\beta t}{2m}}\sin\omega_1 t$$

$$\dot{x}(t) = -\left(\tfrac{\beta}{2m}\right)x(t) - \omega_1 y(t) \quad ; \quad \dot{y}(t) = -\left(\tfrac{\beta}{2m}\right)y(t) + \omega_1 x(t)\,.$$

**2b** Se non ci fosse smorzamento ($\beta = 0$) la traiettoria sarebbe una circonferenza di raggio $R$; con $\beta \neq 0$ il raggio $R\,e^{-\frac{\beta t}{2m}}$ decresce esponenzialmente nel tempo, via via che il punto gira a velocità angolare costante $\dot{\theta} = \omega_1$. La traiettoria è quindi una spirale percorsa tutta nello stesso verso, e $ds = |\vec{v}(t)|dt = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt$ . Sostituisco

$$ds = \sqrt{\omega_1^2 + \left(\tfrac{\beta}{2m}\right)^2}\; R\,e^{-\beta t/2m}dt \quad \text{e integrando in } dt \text{ ottengo} \quad s(t) = s_o + \sqrt{1 + \left(\frac{2m\omega_1}{\beta}\right)^2}\; R\,(1 - e^{-\beta t/2m})\,,$$

dove $s_o = 0$ per rispettare la condizione iniziale $s(t=0) = 0$. Con la formula ottengo poi $s$ all'istante $t=t_1$.

**2c** La lunghezza $L$ della strada percorsa dalla pallina dopo un tempo (e un numero di giri) infinito è finita e pari a

$$L = \lim_{t\to\infty} s(t) = \sqrt{1 + \left(\frac{2m\omega_1}{\beta}\right)^2}\; R$$

**2d** Dalla forma piú semplice (risposta **[2a]**, ultime equazioni) abbiamo già notato che la traiettoria è una spirale circolare: l'angolo $\theta$ formato dalla semiretta uscente dall'origine e passante per la pallina aumenta linearmente nel tempo come $\theta(t) = \omega_1 t$, mentre la distanza della pallina dall'origine $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = R\,e^{-\beta t/2m}$ decresce esponenzialmente nel tempo con costante di decadimento $\tau = 2m/\beta$. Sostituendo $t = \theta/\omega_1$ nell'espressione della distanza del punto dall'origine, otteniamo l'equazione della traiettoria in coordinate cilindriche:

$$r(\theta) = R\,e^{-\frac{2m}{\beta\omega_1}\theta} \quad ; \quad z = 0.$$

| m (Kg) | k ($Kg/s^2$) | β (Kg/s) | R (m) | $t_1$ (s) |
|---|---|---|---|---|
| 4.20 | 945 | 75.6 | 1.00 | 0.131 |

**1a** **max 5 punti**

$\omega_0^2 =$ 225

$\omega_1 =$ 12.0

$\ell_o =$ 50.4

versore = (0,0,1)

**1b** **max 5 punti**

$$|d\vec{\ell}/dt|_o = | -(\beta/m)\vec{\ell}_o| = (\beta/m)\,\ell_o = \beta\omega_1 R^2 = 907.2$$

versore = – (0,0,1)

**1c** **max 5 punti**

il versore del momento angolare non varia nel tempo e resta quindi sempre uguale a (0,0,1)

**1d** **max 5 punti**

$\ell_1 =$ 4.77

**2a** **max 5 punti**

$\beta/2m =$ 9.00

$\exp(-\beta t_1/2m) =$ 0.308

$\omega_1 t_1 =$ 1.572

$\cos(\omega_1 t_1) =$ -0.00

$\sin(\omega_1 t_1) =$ 1.00

$x_1 =$ -0.000

$y_1 =$ 0.308

$dx/dt_1 =$ -3.688

$dy/dt_1 =$ -2.773

**2b** **max 5 punti**

$s_1 =$ 1.154

**2c** **max 5 punti**

$s_\infty =$ 1.667

**2d** **max 5 punti**

$r(\theta) = R \exp[ -( 2m / \beta\omega_1)\theta ]$