

Oscillatore armonico con smorzamento senza gravità. Testo del problema.

In un riferimento inerziale $Oxyz$, in assenza di gravità, un punto materiale di massa m è attaccato all'estremità di una molla ideale, di lunghezza di riposo nulla e costante elastica k ; l'altra estremità della molla è fissata nell'origine del sistema di riferimento. Il sistema è immerso in un fluido il cui coefficiente di resistenza al moto della pallina è β . Ci troviamo nel regime sottosmorzato, ovvero, se $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - (\beta/2m)^2}$ è reale. All'istante $t=0$ la posizione della pallina è data da $x_0 = R > 0$; $y_0 = z_0 = 0$, e le componenti cartesiane della sua velocità sono $v_{x_0} = -(\beta/2m)R < 0$, $v_{y_0} = \omega_1 R > 0$; $v_{z_0} = 0$. I dati relativi a m , k , β e R si trovano sul foglio personale, in unità SI. Anche i risultati vanno forniti in SI.

Domande

- 1a** Determinare all'istante iniziale, nel riferimento dato, il vettore momento angolare della pallina rispetto all'origine, fornendo modulo e versore. [5 punti]
- 1b** Determinare all'istante iniziale, nel riferimento dato, la derivata temporale del momento angolare della pallina rispetto all'origine, fornendo modulo e versore. [5 punti]
- 1c** Scrivere per $t > 0$ la legge temporale con la quale il versore del momento angolare varia nel tempo. In particolare, quanto vale per $t = t_1$? (t_1 è nei dati personali) [5 punti]
- 1d** Scrivere per $t > 0$ la legge temporale con la quale il modulo del momento angolare varia nel tempo. In particolare, quanto vale per $t = t_1$? [5 punti]
- 2a** Scrivere per $t > 0$ la legge del moto della pallina $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ e la corrispondente velocità $v_x = \dot{x}(t)$, $v_y = \dot{y}(t)$, $v_z = \dot{z}(t)$. In particolare, quali sono la posizione x , y e z e la velocità v_x , v_y e v_z della pallina per $t = t_1$? [5 punti]
- 2b** Determinare la legge oraria $s = s(t)$ dell'ascissa curvilinea relativa alla traiettoria percorsa dalla pallina per $t > 0$. In particolare, quanto vale s per $t = t_1$? [5 punti]
- 2c** Quanta strada ha fatto la pallina dopo un tempo infinito, ovvero quanto vale il limite $L = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t)$? L è infinito o finito? Se L è finito, quanto vale? [5 punti]
- 2d** La traiettoria della pallina, ottenuta al punto 2a in coordinate cartesiane come curva parametrizzata dal tempo $x(t) y(t) z(t)$, si esprime in modo ancora più semplice se si usano coordinate cilindriche r, θ, z . Fornire quest'espressione. [5 punti]

Per gli smemorati: la soluzione generale dell'eq. differenziale $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$ è

$$x(t) = \left[x_0 \cos \omega_1 t + \left(v_{x_0} + \frac{\beta x_0}{2m} \right) \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} \right] e^{-\frac{\beta t}{2m}}$$

| m (Kg) | k (Kg/s ²) | β (Kg/s) | R (m) | t ₁ (s) |
|--------|------------------------|----------------|-------|--------------------|
| 4.20 | 945 | 75.6 | 1.00 | 0.131 |

1a **max 5 punti**

1b **max 5 punti**

1c **max 5 punti**

1d **max 5 punti**

2a **max 5 punti**

2b **max 5 punti**

2c **max 5 punti**

2d **max 5 punti**