PENDOLO SFERICO CON ARIA

L1

GR ottobre 2014

$$\omega_1 = \sqrt{\underbrace{\omega_0^2 - (\beta/2m)^2}_{>0}} < \omega_0$$

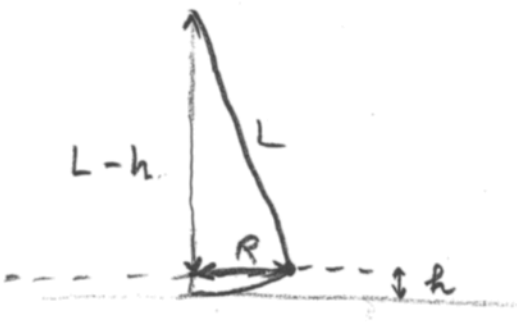
Abbiamo altresì $R(t) = R_0 e^{-\frac{\beta t}{2m}}$

$$v(t) = R_0\sqrt{\omega_1 + (\beta/2m)^2}\, e^{-\frac{\beta}{2m}t} = R_0\omega_0 e^{-\frac{\beta}{2m}t} = v_0 e^{-\frac{\beta}{2m}t}$$

questo avviene con condizioni iniziali che per $\beta = 0$ darebbero (e danno) il moto circolare uniforme, dove il raggio non cambia nel tempo in quanto la velocità è tutta tangenziale e la forza della molla bilancia esattamente la "forza centripeta" (digressione sulle forze apparenti...)

$$\frac{m v_0^2}{R} = m\omega_0^2 R = kR \qquad \text{perchè } \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Se immaginiamo ora che la forza di richiamo sia quella di un pendolo verso il suo punto di equilibrio, e che ci si trovi in regime di piccole oscillazioni in modo che valga per il pendolo la legge delle oscillazioni armoniche con $\omega_0^2 = g/L$



osserviamo che se le condizioni iniziali sono quelle appropriate al moto circolare uniforme di raggio R, questo si svolgerà a quota h tale che $R^2 + (L-h)^2 = L^2 \Rightarrow$

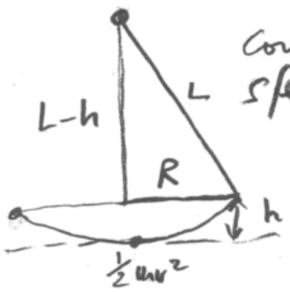
$$\Rightarrow R^2 = L^2 - (L-h)^2 \Rightarrow R^2/L^2 = 1 - \left(1 - \frac{h}{L}\right)^2 \simeq 1 - 1 + \frac{2h}{L} = \frac{2h}{L}$$

$\Rightarrow R^2 \simeq 2hL$ (piccole oscillazioni) $\Rightarrow h = R^2/2L$

Questo valore di $h = R^2/2L$ corrisponde, se il moto è circolare, al raggio per il quale in quell'istante la forza centripeta mv^2/R bilancia la forza di richiamo della molla K, o del pendolo mg/L, verso il punto di equilibrio:

$$\frac{mv^2}{R} = KR = \frac{mg}{L}R \Rightarrow v^2 = \frac{K}{m}R^2 = \frac{g}{L}R^2$$ nel caso del pendolo (sferico) notiamo che questa equazione ci parla (anche) dell'energia potenziale gravitazionale e della quota del pendolo:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{g}{L}R^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g}$$



Confronto oscillazioni sferiche e piane: ecco il motivo.

Quindi nel pendolo ottengo

$$h = \frac{R^2}{2L} = \frac{v^2}{2g}$$

Se $R = R_0$ ... tutto costante.

Se $R(t) = R_0 e^{-\frac{\beta}{2m}t}$; $v(t) = v_0 e^{-\frac{\beta}{2m}t}$
$= R_0 \omega_0 e^{-\frac{\beta}{2m}t}$

$$\frac{R^2}{2L} = \frac{R_0^2 e^{-\frac{\beta}{m}t}}{2L} = h_0 e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{v_0^2 e^{-\frac{\beta}{m}t}}{2g} = \frac{R_0^2 \omega_0^2 e^{-\frac{\beta}{m}t}}{2g} = \frac{R_0^2 e^{-\frac{\beta}{m}t}}{2L} = h_0 e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2$$

$$\begin{cases} x(t) = R_0\, e^{-\frac{\beta}{2m}t} \cos\omega_1 t \\ y(t) = R_0\, e^{-\frac{\beta}{2m}t} \sin\omega_1 t \\ z(t) = \frac{R_0^2}{2L}\, e^{-\frac{\beta}{m}t} = h_0\, e^{-\frac{\beta}{m}t} \end{cases}$$

forza di richiamo di ordine $\theta \sim R/L$

va a zero 2 volte più veloce di x e y perché $\propto R^2$

come mai?

lungo z, la forza di richiamo è $\propto \theta^2$ ed è trascurata in questa approssimazione; l'equazione approssimata è $\ddot{z} = -\beta\dot{z}\ [+O(\theta^2)]$, smorzamento senza altre forze