TRAIETTORIE PLANARI - GB ottobre 2014

In un riferimento inerziale, se la direzione di $\vec{l} = (\vec{r}-\vec{r}_\Omega)\times\vec{p} = m(\vec{r}-\vec{r}_\Omega)\times\vec{v}$, vettore momento angolare di un punto materiale di posizione $\vec{r}$ e velocità $\vec{v}$ rispetto a un punto fisso $\vec{r}_\Omega$ nel riferimento dato, è costante nel tempo, allora in quel riferimento la traiettoria giace in un piano. Infatti la direzione (istantanea) di $\hat{l}$ coincide con la normale al piano individuato in ogni istante dalla coppia di vettori $(\vec{r}-\vec{r}_\Omega)$ e $\vec{v}$.

Poichè fra momento (risultante di tutte le forze agenti su un punto materiale) e variazione nel tempo del suo momento angolare sussiste la relazione

$$\vec{\tau}_\Omega = (\vec{r}-\vec{r}_\Omega)\times\vec{f} = \frac{d\vec{l}}{dt},$$

affinchè la traiettoria giaccia in un piano occorre e basta che sia

$$\vec{\tau}_\Omega \parallel \vec{l}_\Omega \quad \text{ovvero} \quad \vec{\tau}_\Omega = \alpha\,\vec{l}_\Omega$$

con α funzione reale

Infatti dire $\vec{\tau}_\Omega = \frac{d\vec{l}_\Omega}{dt} = \alpha \vec{l}_\Omega$ è come dire che

la componente di $\vec{\tau}_\Omega$ perpendicolare a $\vec{l}_\Omega$, l'unica in grado di modificarne la direzione, è nulla; la dipendenza dal tempo del momento angolare è del tipo

$$\vec{l}_\Omega(t) = l_\Omega(t)\,\hat{n}$$

dove $\hat{n}$ è la normale al piano della traiettoria, che non cambia nel tempo, e $l_\Omega(t)$ è la parte scalare, che può cambiare nel tempo (come accade ad esempio in un moto circolare accelerato o frenato o qualunque altro circolare ma non uniforme).

La condizione $\vec{\tau}_\Omega \parallel \vec{l}_\Omega$ equivale alla condizione

$$\vec{\tau}_\Omega \times \vec{l}_\Omega = 0 \text{, ovvero}$$

$$\left[(\vec{r}-\vec{r}_\Omega)\times\vec{f}_{risult}\right]\times\left[(\vec{r}-\vec{r}_\Omega)\times m\vec{v}\right] = 0$$

Quanto vale quel prodotto?

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) =$$

$$= [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\,\vec{c} - [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\,\vec{d} =$$

$$= (a\cdot b\times d)\,\vec{c} - (\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c})\,\vec{d} =$$

$$= \left\|\begin{matrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ d_x & d_y & d_z \end{matrix}\right\| \vec{c} - \left\|\begin{matrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{matrix}\right\| \vec{d}$$

Nel nostro caso sostituendo $\vec{a} = \vec{c} = \vec{r} - \vec{r}_\Omega$ vediamo subito che il secondo determinante si annulla; resta il primo termine che sostituendo anche $\vec{b} = \vec{f}_{risult}$ e $\vec{d} = m\vec{v}$, fornisce la condizione che per qualsiasi t lungo la traiettoria sia:

$$\vec{\tau}_\Omega \times \vec{l}_\Omega = m \left\|\begin{matrix} x - x_\Omega & y - y_\Omega & z - z_\Omega \\ f_x^{risult} & f_y^{risult} & f_z^{risult} \\ v_x & v_y & v_z \end{matrix}\right\| (\vec{r} - \vec{r}_\Omega) = 0$$

Ora se il punto si muove $(\vec{r} - \vec{r}_\Omega) \neq 0$ per qualche t, quindi la condizione si riduce all'annullamento del determinante.

A questo punto possiamo dire a colpo sicuro senza risolvere l'equazione del moto con particolari condizioni iniziali, che alcune forze risultanti agenti su un punto materiale danno luogo a traiettorie piane, ad esempio

▷ forze centrali rispetto al polo $\vec{r}_\Omega$, come

$$\vec{f}^{\,risult} = -k(\vec{r}-\vec{r}_\Omega) \quad \text{(molla), oppure}$$

$$\vec{f}^{\,risult} = -mMG \frac{\vec{r}-\vec{r}_\Omega}{|\vec{r}-\vec{r}_\Omega|^3}$$

(gravità che attira la luna, posizione $\vec{r}$ e massa m, verso la Terra, posizione $\vec{r}_\Omega$ e massa M)

perchè la prima e la seconda riga del determinante sono sempre proporzionali

▷ $\vec{f}^{\,risult} = -\beta\vec{v}$ (resistenza del mezzo)

perchè la seconda e la terza riga del determinante sono sempre proporzionali

▷ qualsiasi combinazione di una forza centrale rispetto a un polo $\vec{r}_\Omega$ e la resistenza del mezzo, perché in tal caso, in ogni istante, la seconda riga ($\vec{f}^{\,risult}$) è combinazione lineare della prima e della terza, e il determinante si annulla. Esempio:

molla con resistenza dell'aria

$$\vec{f}^{\,risult} = -k(\vec{r} - \vec{r}_\Omega) - \beta \vec{v}, \text{ eccetera}$$

▷ qualsiasi traiettoria balistica, basta scegliere come polo $\vec{r}_\Omega$ la posizione del punto a $t=0$ $[\vec{r}_\Omega = (x_0, y_0\, z_0)]$

$$\vec{f}^{\,risult} = (0,0,-mg)$$

$$\vec{\tau}_\Omega \times \vec{l}_\Omega = -mg \begin{Vmatrix} x(t)-x_0 & y(t)-y_0 \\ v_x(t) & v_y(t) \end{Vmatrix} [\vec{r}(t)-\vec{r}_0]$$

$= 0$ perché $x(t) = x_0 + v_{0x} t$, $v_x(t) = v_{0x} = \text{cost.}$

e lo stesso per $y(t)$