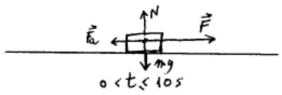
IV ESERCITAZIONE

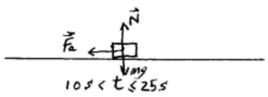
Esercizio 1

Un blocco di massa $m = 2$ kg è posto su un piano orizzontale scabro. Una forza avente direzione orizzontale e modulo costante $F = 20$ N agisce sul blocco, inizialmente fermo, dall'istante $t_0 = 0$ all'istante $t_1 = 10$ s. Cessata l'azione della forza, il blocco rallenta fermandosi all'istante $t_2 = 25$ s. Si calcoli il coefficiente d'attrito dinamico tra il blocco e il piano.

Soluzione



$0 < t \leq 10s$



$10s < t \leq 25s$

$\vec{F} - \vec{F}_a = m\vec{a}_1$

$F - \mu_d mg = m a_1$

$a_1 > 0$

$a_1 = \frac{F - \mu_d mg}{m} = \frac{F}{m} - \mu_d g$

$v_1(t) = v_{01} + a_1 \cdot t = a_1 t$

$v_1(10) = \left(\frac{F}{m} - \mu_d g\right) \cdot 10 = (10 - \mu_d \cdot 9'81) \cdot 10\ m/s$

$v_1(t=10) = (100 - 98'1 \cdot \mu_d)\ m/s$

$\vec{F}_a = m\vec{a}_2$

$-\mu_d mg = m a_2$

$a_2 < 0$

$a_2 = -\mu_d g$

$v_2(t) = v_{02} - \mu_d g\,(t - 10)$

$v_{02} = v_1(10) = 100 - 98'1\mu_d$

$v_2(t = 25s) = 0$

$\downarrow$

$100 - 98'1\mu_d = 9'81 \cdot \mu_d \cdot 15$

$\mu_d(98'1 + 9'81 \cdot 15) = 100$

$\boxed{\mu_d = \frac{100}{245'25} = 0{,}4077}$

Possiamo risolvere questo problema utilizzando il teorema del impulso

$I = \int_{t_0}^{t_2} \vec{F}_{tot}\, dt = m(v_F - v_i)$

siccome la velocità iniziale e quella finale sono zero $\rightarrow$ $v_F - v_i = 0 \rightarrow I = 0$

$I = \int_{t_0}^{t_2} F_{tot}\, dt = 0 = \int_{t_0}^{t_1} (F - \mu_d mg)\, dt + \int_{t_0}^{t_2} (-\mu_d mg)\, dt = F(t_1 - t_0) - \mu_d mg(t_2 - t_0)$

$\mu_d = \frac{F(t_1 - t_0)}{mg(t_2 - t_0)} = \frac{20N \cdot 10s}{2kg \cdot 9'81 m/s^2 \cdot 25s} = 0{,}4077$

Esercizio 2

Una forza $\vec{F} = \vec{F}(t)$ agente su un corpo puntiforme di massa m, ne causa il moto descritto dalle seguenti equazioni parametriche: $x(t) = c_1 t^3$, $y(t) = c_2 t^2$, $z(t) = c_3 t$, dove c_1, c_2 e c_3 sono delle costanti. Si determini la potenza sviluppata dalla suddetta forza applicata.

Soluzione

$$\vec{r} = c_1 t^3 \vec{u}_x + c_2 t^2 \vec{u}_y + c_3 t \vec{u}_z$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 3c_1 t^2 \vec{u}_x + 2c_2 t \vec{u}_y + c_3 \vec{u}_z$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 6c_1 t \vec{u}_x + 2c_2 \vec{u}_y$$

$$\vec{F}(t) = m\vec{a}(t) = m(6c_1 t \vec{u}_x + 2c_2 \vec{u}_y)$$

$$P = \frac{\delta L}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$P = m(18c_1^2 t^3 + 4c_2^2 t)$$

Esercizio 3

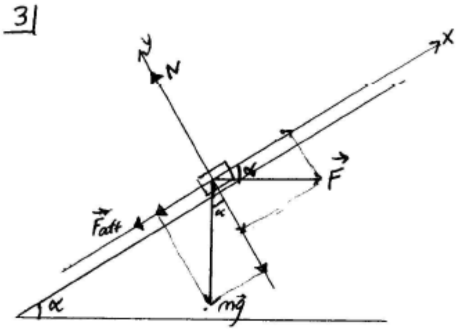
Ad un blocco di massa $m = 4.8$ kg che si trova su un piano inclinato di un angolo $\alpha = 38°$ rispetto all'orizzontale, è applicata la forza $F = 47$ N orizzontale, disegnata in figura. Il coefficiente di attrito dinamico fra il blocco ed il piano inclinato è $\mu_d = 0.33$ ($\mu_s > \mu_d$). All'istante iniziale il blocco è in moto lungo il piano inclinato con velocità $v_ini = 4.3$ m/s verso l'alto. Si osserva che successivamente il blocco rallenta fino a fermarsi dopo un intervallo di tempo T.

i) Si trovi la lunghezza dello spostamento del bloccofino all'istante T.

ii) Si calcoli il lavoro della forza totale agente sul blocco nell'intervallo di tempo T. **iii)** Si calcoli per $t = T$ (T istante in cui il blocco si ferma) modulo, direzione e verso della forza d'attrito statica che il piano applica sul blocco.

Soluzione

3)



asse x

$$F\cos\alpha - mg\,sen\alpha - \mu_d N = ma \quad (1)$$

asse y

$$-F sen\alpha - mg\cos\alpha + N = 0$$

$$\rightarrow N = F sen\alpha + mg\cos\alpha \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow \quad a = \frac{1}{m}\left(F\cos\alpha - mg\,sen\,\alpha - \mu_d\,(F sen\alpha + mg\cos\alpha)\right)$$

$$a = -2{,}87 \ m/s^2$$

$$a = \frac{v_F - v_i}{T} = \frac{0 - v_i}{T} \rightarrow T = \frac{-v_i}{a} = 1{,}5 \ s$$

$$\left.\begin{array}{l} X(t) = x_0 + v_{INI}\,t - \frac{1}{2}a t^2 \\ x_0 = 0 \end{array}\right\} X(t) = v_{INI}\,t - \frac{1}{2}a t^2$$

$$\boxed{X(T) = 3{,}22 \ m}$$

ii]

$$\vec{F}_T = \left[F\cos\alpha - mg\,sen\alpha - \mu_d\left(F sen\alpha + mg\cos\alpha\right)\right]\vec{u}_x = -13,79\ N\ \vec{u}_x$$

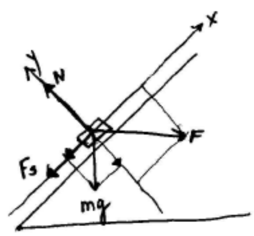
$$\vec{r} = 3,22\ m\ \vec{u}_x$$

$$L_T = \vec{F}\cdot\vec{r} = -13,79\cdot 3,22\ N\cdot m = -44,4\ J$$

Usando il teorema dell'energia cinetica

$$L_T = E_{cf} - E_{ci} = 0 - \frac{1}{2} m v_{N_1}^2 = -44,4\ J$$

iii]

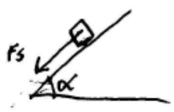


asse y → in equilibrio $N = F sen\alpha + mg\cos\alpha = 66,05\ N$

asse x $F\cos\alpha - mg\,sen\,\alpha - F_s = 0$

considiamo che F_s è diretto verso il basso, ma ancora non lo sapiamo. Se risulta un valore $F_s<0$ sarebbe verso l'alto

$$F_s = F\cos\alpha - mg\,sen\alpha = 8\ N$$



si verifica $F_s < \mu_s N$

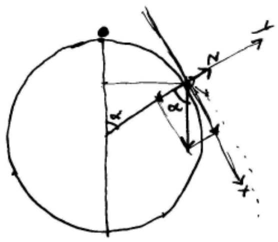
$$\mu_s N \geqslant \mu_d N = 0,33\cdot 66,05\ N = 21,8\ N$$

Esercizio 4

Un corpo puntiforme viene lasciato scivolare da fermo dalla sommità di una superficie cilindrica liscia di raggio R. Si calcoli l'angolo α in corrispondenza del quale il corpo si stacca dal cilindro.

Soluzione

4



asse x

$$mg\,\text{sen}\,\alpha = m a_t = m \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

asse y

$$mg\cos\alpha - N = m a_r = m\frac{v^2}{R}$$

Quando il corpo si stacca dal cilindro $N = 0$

$$mg\cos\alpha_0 = m\frac{v^2}{R} \rightarrow \cos\alpha_0 = \frac{v^2}{gR} \quad ; \quad v^2 = gR\cos\alpha_0 \qquad (1)$$

usando il Teorema di Conservazione dell'energia:

$$E_i = E_{pi} + E_{ci} = mg\,2R + \frac{1}{2}m v_i^2 = mg\,2R \qquad (v_i = 0)$$

$$E_f = E_{pf} + E_{cf} = mgR(1+\cos\alpha_0) + \frac{1}{2}m v^2$$

$$E_i = E_f \rightarrow \quad mg\,2R = mgR(1+\cos\alpha_0) + \frac{1}{2}m v^2 \qquad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow \quad 2 = 1 + \cos\alpha_0 + \frac{1}{2}\cos\alpha_0 \rightarrow \cos\alpha_0 = \frac{2}{3}$$

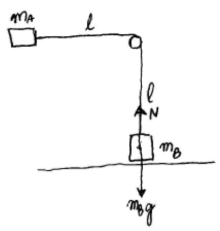
$$\boxed{\alpha_0 = 48{,}19^\circ}$$

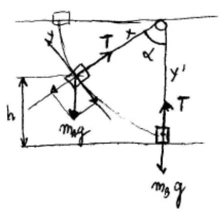
Esercizio 5

Un corpo A di massa $m_A = 2$ kg è collegato tramite una fune ideale, di lunghezza $2l = 4$ m, ad un corpo B di massa $m_B = 3$ kg tramite una carrucola O. Inizialmente il corpo B è appoggiato su un piano orizzontale ed il tratto del filo OB è verticale, mentre il corpo A, in quiete, è tenuto col tratto di filo OA teso ed orizzontale. Si lascia libero il corpo A. Si determini di quanto si abbassa il coerpo A, in verticale, prima che il corpo B si stacchi dal piano d'appoggio.

Soluzione

5]





Corpo A

asse x: $T - m_A g\cos\alpha = m a_c = m_A \frac{v_A^2}{l}$

$T = m_A \frac{v_A^2}{l} + m_A g \cos\alpha$ (1)

Principio di conservazione dell'energia (corpo A)

$E_i = E_{pi} + E_{ci} = m_A g l$

$E_f = E_{pf} + E_{cf} = m_A g h + \frac{1}{2} m v_A^2 = m_A g (l(1-\cos\alpha)) + \frac{1}{2} m_A v_A^2$

$E_i = E_f \rightarrow v_A^2 = 2 g l \cos\alpha$ (2)

(1),(2) $\rightarrow \boxed{T = 3 m_A g \cos\alpha}$

Il corpo B si stacca quando $T = m_B g$

$3 m_A g \cos\alpha = m_B g \rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{1}{3}\frac{m_B}{m_A}}$ Il corpo B si stacca solo se $m_B < 3 m_A$

Usando $m_A = 2$ kg, $m_B = 3$ kg $\rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60°$

Il corpo B si stacca quando il corpo A si è abassato

$l - h = l(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2} l = \underline{\underline{1\ \text{m}}}$

Esercizio 6

Un corpo di massa m scivola partendo da fermo lungo un piano inclinato con $\alpha = 42°$. Dopo aver percorso una diastanza $d = 4.617$m, raggiunge una velocità $v = 6.41$ m/s. Calcolare il coefficiente di attrito dinamico μ_d tra il corpo e il piano.

Soluzione

Per il torema dell'energia cinetica:

$$L_{TOT} = K_f - K_i \tag{1}$$

dove l'energia cinetica iniziale $K_i = 0$, quella finale $K_f = \frac{1}{2}mv^2$ ed il lavoro totale è dato dalla somma del lavoro della forza peso e di quello della forza d'attrito:

$$L_{TOT} = L_P + L_A = mgh - F_A d = mgh - \mu_d mgd\cos\alpha \tag{2}$$

dove $h = d\sin\alpha$.
Sostituendo nella (1) si ottiene:

$$\mu_d = \tan\alpha - \frac{v^2}{2gd} \simeq 0.29 \tag{3}$$

Nota: Si può impostare il problema considerando che la variazione di energia meccanica ΔE è data dal lavoro delle forze non conservative: $\Delta E = L_A$ con $\Delta E = \frac{1}{2}mv^2 - mgh$. Quindi lo svolgimento dell'esercizio è identico a quello mostrato a partire dal teorema dell'energia cinetica.

Esercizio 7

Un corpo di massa $m = 4$ kg, attaccato ad una molla di costante elastica $k = 327$ N/m, si muove su una guida orizzontale con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.4$. Inizialmente la molla viene allungata di Δx. Calcolare quale deve essere il Δx affinché il corpo torni nell'origine con $v = 0$ senza compiere oscillazioni.

Soluzione

Per tornare nella posizione iniziale senza compiere oscillazioni il corpo deve percorrere una traiettoria rettilinea lunga Δx. Durante questo spostamento, sul corpo agiscono la forza elastica della molla e la forza d'attrito, il cui lavoro è dato rispettivamente da $L_E = \frac{1}{2}k\Delta x^2$ e $L_A = -\mu_d mg\Delta x$.
Per il teorema dell'energia cinetica:

$$L_{TOT} = L_E + L_A = \Delta K = 0 \tag{4}$$

dove l'ultima uguaglianza viene dal fatto che il corpo parte ed arriva con velocità nulla. Si ottiene quindi:

$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \mu_d mg\Delta x \tag{5}$$

da cui:

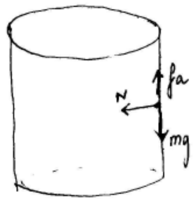
$$\Delta x = \frac{2\mu_d mg}{k} = 0.096m \tag{6}$$

Nota: Anche questo problema si può impostare a partire da $\Delta E = L_A$, dove $\Delta E = E_f - E_i = 0 - \frac{1}{2}k\Delta x^2 = -\frac{1}{2}k\Delta x^2$, riottienendo quindi la (5).

Un rotor è un'attrazione concepita negli anni '40 e consiste di una grande stanza cilindrica a sezione cirsolare orizzontale di raggio $\boldsymbol{R}$, con pareti scabre caratterizzate da un coefficiente d'attrito statico μ_s, che viene fatta ruotare a velocità angolari dell'ordine di 30 rivoluzioni al minuto. La stanza gira intorno ad un asse fisso posto al suo centro e una volta raggiunta una certa velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega}$ il pavimento viene abbassato. Si determini il valore minimo della velocità angolare, $\boldsymbol{\omega_{min}}$, affinché una persona, appoggiata alla parete interna della stanza, non precipiti sul pavimento quando questo viene abbassato. Si consideri la persona come un punto materiale e i valori dei parametri μ_s =0.3 e $\boldsymbol{R}$= 3 m. Si determini in corrispondenza di $\boldsymbol{\omega_{min}}$ il valore dell'accelerazione centripeta percepita dalla persona.

Soluzione

La forza che fa girare la persona con accelerazione centripeta è la forza normale (forza di reazione) delle pareti.



$$N = m\frac{v^2}{R} \underset{v = \omega R}{=} m\omega^2 R$$

Poi, siccome le pareti sono scabre, c'è una forza di attrito statico che equilibra il peso della persona

$$\left.\begin{array}{l} f_a \le \mu_s N \\ f_a = mg \end{array}\right\} \mu_s N \geq mg$$

$$\mu_s m\omega^2 R \geq mg$$

$$\omega^2 \geq \frac{g}{\mu_s R}$$

$$\boxed{\omega_{MIN} = \sqrt{\frac{g}{\mu_s R}}}$$

con $\mu_s = 0,3$ $R = 3\,m$ $g = 9'81\,m/s^2$ $\rightarrow$ $\omega_{MIN} = 3,30\ rad/s$

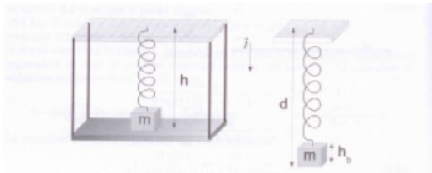
$= 31,5\ rpm$

Sia una molla di massa trascurabile e costante elastica k= 50 N/m appesa al soffitto di un'ascensore di altezza h= 3 m e sia un blocco di massa m= 10 kg e altezza h_b appeso alla molla. Quando l'ascensore è fermo nel sistema inerziale del laboratorio e in assenza del vincolo del pavimento dell'ascensore, il sistema molla + blocco è in equilibrio quando il piano inferiore del blocco è a distanza d= 4 m dal soffitto. Calcolare:

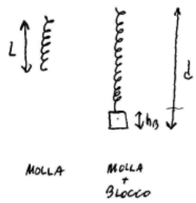
i) La forza che il blocco esercita sul pavimento dell'ascensore sia quando questo è fermo rispetto al sistema del laboratorio, sia quando l'ascensore si muove verso l'alto a velocità costante v_0.

ii) La forza che il blocco esercita sul pavimento dell'ascensore quando questo ha un'accelerazione di 3 m/s^2 verso l'alto.

iii) La minima accelerazione che l'ascensore deve avere verso il basso affinché il blocco si stacchi dal pavimento.



Soluzione



sistema molla-blocco in equilibrio

$$mg = K(d - h_B - L)$$

Il peso del blocco è uguale alla forza elastica della molla

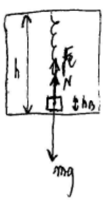
$$\downarrow$$

$$L = d - h_B - \frac{mg}{K}$$

possiamo ricavare la lunghezza della molla senza nessun peso

$$L = 4m - h_B - \frac{10kg \cdot 9'81 m/s^2}{50 N/m} = 2{,}038\,m - h_B$$

La molla all'interno del ascensore è compresa rispetto alla posizione d'equilibrio del sistema molla+blocco, ma è allungata rispetto alla sua lunghezza caratteristica senza blocco



Sul blocco ci sono 3 forze: il suo peso (verso il basso), la forza elastica della molla (verso l'alto) e la forza che il pavimento esercita sul blocco (verso l'alto)

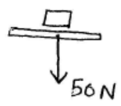
$$Fel + N - mg = 0$$

$$K(h - h_B - L) + N - mg = 0 \rightarrow K(h - 2{,}038m) + N - mg = 0$$

$$N = mg - K(h - h_B - L) \rightarrow N = 98'1N - 50 N/m (3m - 2'038m)$$

$$N = 50N$$

Siccome il blocco esercita una forza d'uguale ma di senso contrario sul pavimento, la forza sarà



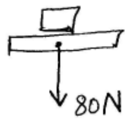
(forza del blocco sul pavimento)

ii) Siccome il blocco è accelerato verso l'alto ($a>0$)

$F_{el} + N' - mg = ma$

$N' = ma + mg - K(h-h_0-L) = 30N + 98'1N - 48'1N = 80N$

La forza del blocco sul pavimento sarà $-N'$ (3ª Legge di Newton)



iii) Quando il blocco si stacca del pavimento la forza normale sarà zero

$F_{el} - mg = -ma$

$a = g - \frac{F_{el}}{m} = 9'81\,m/s^2 - \frac{48'1N}{10kg} = 5\,m/s^2$ (verso il basso)