Relazione di Poisson (Giovanni Bachelet 2013)

Sia $\vec{G}(t)$ un generico vettore che dipende dal tempo t, e siano dati due sistemi di riferimento, uno (S) inerziale, l'altro (T) in pura rotazione rispetto al primo con velocità angolare istantanea $\vec{\omega}(t)$; nel seguito, per brevità, non indichiamo la dipendenza dal tempo. Tra la derivata temporale di $\vec{G}$ nel riferimento inerziale (pedice S), e la derivata temporale di $\vec{G}$ nel riferimento rotante (pedice T), sussiste la seguente relazione, dovuta a Poisson (1781-1840):

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_T + \vec{\omega}\times\vec{G} \tag{1}$$

Dimostrazione

Scegliamo per comodità l'orientamento di S in modo che, nell'istante in cui prendiamo la derivata di $\vec{G}$, gli assi z di S e di T coincidano fra loro e con l'asse istantaneo di rotazione di T rispetto a S, ovvero che in quell'istante $\hat{\mathrm{k}}_T$ e $\hat{\mathrm{k}}_S$ (versori di z) coincidano e la velocità angolare di T in S sia rappresentata dal vettore $\vec{\omega}=(0,0,\omega)$. In tal caso la trasformazione di coordinate che porta dal riferimento S a quello rotante T lascia invariato l'asse z e i versori di T si ottengono da quelli di S con la seguente matrice 3×3:

$$\begin{pmatrix}\hat{\imath}_T\\ \hat{\jmath}_T\\ \hat{\mathrm{k}}_T\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\imath}_S\\ \hat{\jmath}_S\\ \hat{\mathrm{k}}_S\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases}\hat{\imath}_T = \hat{\imath}_S\cos\theta+\hat{\jmath}_S\sin\theta\\ \hat{\jmath}_T = -\hat{\imath}_S\sin\theta+\hat{\jmath}_S\cos\theta\\ \hat{\mathrm{k}}_T=\hat{\mathrm{k}}_S\end{cases} \tag{2}$$

dove l'angolo θ dipende dal tempo: la derivata temporale di quell'angolo è $\dot{\theta}=\omega\neq 0$. [NB: se θ non dipendesse dal tempo, allora la velocità angolare istantanea $\vec{\omega}$ sarebbe nulla e l'orientamento relativo di T ed S nel piano xy sarebbe fisso: rispetto a S il riferimento T, che ha lo stesso asse z, sarebbe, nel piano xy, ruotato di un angolo θ che non cambia nel tempo.] All'istante t uno stesso vettore $\vec{G}$ può essere rappresentato in ciascuna delle due basi:

1. nel riferimento inerziale S la sua rappresentazione è $\vec{G}=G_{Sx}\,\hat{\imath}_S+G_{Sy}\,\hat{\jmath}_S+G_{Sz}\,\hat{\mathrm{k}}_S$, dove $\hat{\imath}_S$, $\hat{\jmath}_S$ e $\hat{\mathrm{k}}_S$ sono i versori cartesiani di S (indipendenti dal tempo) e G_{Sx}, G_{Sy}, G_{Sz} le tre componenti di $\vec{G}$ secondo quei tre assi;
2. nel riferimento rotante T la sua rappresentazione è è $\vec{G}=G_{Tx}\,\hat{\imath}_T+G_{Ty}\,\hat{\jmath}_T+G_{Tz}\,\hat{\mathrm{k}}_T$, dove $\hat{\imath}_T$, $\hat{\jmath}_T$ e $\hat{\mathrm{k}}_T$ sono i versori cartesiani di T (che in S dipendono dal tempo) e G_{Tx}, G_{Ty}, G_{Tz} le corrispondenti componenti di $\vec{G}$.

Qualunque delle due rappresentazioni si scelga, la derivata temporale di $\vec{G}$ nel riferimento inerziale S è la stessa:

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_S = \frac{d}{dt}\left(G_{Sx}\,\hat{\imath}_S+G_{Sy}\,\hat{\jmath}_S+G_{Sz}\,\hat{\mathrm{k}}_S\right) = \frac{d}{dt}\left(G_{Tx}\,\hat{\imath}_T+G_{Ty}\,\hat{\jmath}_T+G_{Tz}\,\hat{\mathrm{k}}_T\right);$$

il terzo membro dell'uguaglianza, tenendo conto che i versori di T variano nel tempo, diventa

$$\frac{d}{dt}\left(G_{Tx}\,\hat{\imath}_T+G_{Ty}\,\hat{\jmath}_T+G_{Tz}\,\hat{\mathrm{k}}_T\right)=\left(\frac{dG_{Tx}}{dt}\,\hat{\imath}_T+\frac{dG_{Ty}}{dt}\,\hat{\jmath}_T+\frac{dG_{Tz}}{dt}\,\hat{\mathrm{k}}_T\right)+\left[G_{Tx}\left(\frac{d\,\hat{\imath}_T}{dt}\right)_S+G_{Ty}\left(\frac{d\,\hat{\jmath}_T}{dt}\right)_S+G_{Tz}\left(\frac{d\,\hat{\mathrm{k}}_T}{dt}\right)_S\right]$$

dove i primi tre termini raggruppati in parentesi tonda, sommati, restituiscono $(d\vec{G}/dt)_T$, mentre i tre termini raggruppati in parentesi quadra, sommati, restituiscono $\vec{\omega}\times\vec{G}$. Infatti la trasformazione dell'equazione (2) implica

$$\left(\frac{d\,\hat{\imath}_T}{dt}\right)_S=(-\hat{\imath}_S\sin\theta+\hat{\jmath}_S\cos\theta)\,\dot{\theta}=\omega\,\hat{\jmath}_T\ ;\ \left(\frac{d\,\hat{\jmath}_T}{dt}\right)_S=(-\hat{\imath}_S\cos\theta-\hat{\jmath}_S\sin\theta)\,\dot{\theta}=-\omega\,\hat{\imath}_T\ ;\ \left(\frac{d\,\hat{\mathrm{k}}_T}{dt}\right)_S=0,\ \text{e quindi}$$

$$\Big[...\Big] = \omega\,(G_{Tx}\,\hat{\jmath}_T-G_{Ty}\,\hat{\imath}_T) = \omega\,(G_{Sx}\,\hat{\jmath}_S-G_{Sy}\,\hat{\imath}_S) = \left\|\begin{matrix}\hat{\imath}_S & \hat{\jmath}_S & \hat{\mathrm{k}}_S\\ 0 & 0 & \omega\\ G_{Sx} & G_{Sy} & G_{Sz}\end{matrix}\right\| = \vec{\omega}\times\vec{G}$$

dove la doppia barra verticale indica il determinante. Resta cosí dimostrata la relazione di Poisson, equazione (1). [NB: L'eguaglianza $(G_{Tx}\,\hat{\jmath}_T-G_{Ty}\,\hat{\imath}_T)=(G_{Sx}\,\hat{\jmath}_S-G_{Sy}\,\hat{\imath}_S)$ deriva dalla trasformazione di coordinate equazione (2).] [NB: Nel trasformare velocità e accelerazioni da un riferimento inerziale S a uno rototraslante T, con $\vec{R}(t)$ vettore di traslazione istantanea fra le due origini e $\vec{\omega}(t)$ velocità angolare istantanea di T rispetto a S, la relazione di Poisson va applicata non ai vettori $\vec{r}$ e $\vec{v}$, bensí a $\vec{r}-\vec{R}$ e a $\vec{v}-\vec{V}$: solo cosí ci riconduciamo al caso della rotazione pura.]