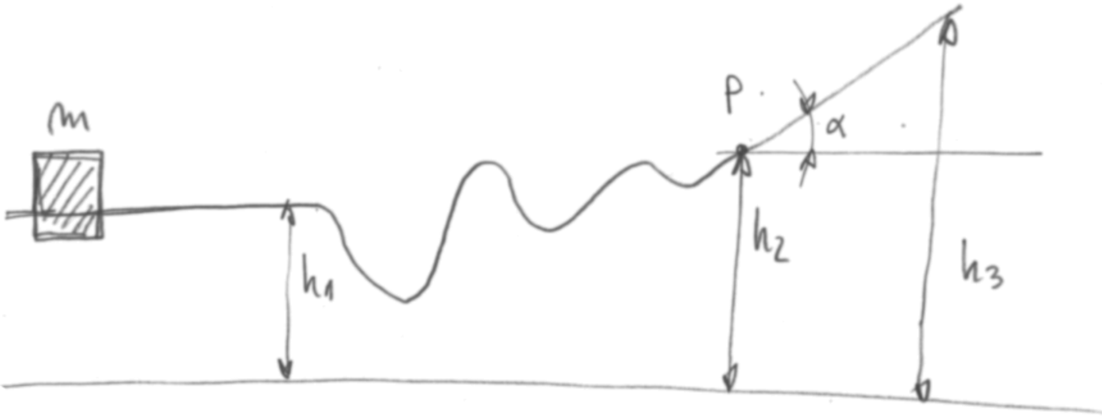
MONTAGNE RUSSE



Un carrello di massa m è libero di muoversi senza attrito lungo il binario delle montagne russe cui è vincolato. Il primo tratto del binario è orizzontale, a quota h_1. Al tempo $t_0=0$ al carrello, inizialmente fermo viene applicata una forza dipendente dal tempo $f(t) = f_0 (t/\tau)^n$, che cessa all'istante $t=\tau$. (1a) Determinare la velocità v_1 con cui il carrello continua a viaggiare sul tratto orizzontale per $t>\tau$. In seguito il carrello prosegue la sua corsa senza attrito lungo la guida (che dopo il tratto orizzontale sale e scende) fino al punto P con velocità $v_2 = v_1/2$. (1b) Determinare la quota h_2 a cui corrisponde P. (1c) Dopo P il binario diventa rettilineo e scabro con pendenza α rispetto al piano orizzontale e coefficiente di attrito dinamico μ_d; determinare la quota massima h_3 raggiunta in questo tratto dal carrello prima di fermarsi.

quantità di moto:

$$\bar{q} = m\bar{v}$$

$$\bar{F} = \frac{d\bar{q}}{dt}$$

→ Vale in un sistema di riferimento inerziale.

$$\boxed{mv = \int F\,dt}$$ Teorema dell'impulso.

$$mv = \int_0^\tau f_0 \,(t/\tau)^n$$

$$mv = f_0 \frac{(t/\tau)^{n+1}}{n+1} \tau \Big|_0^\tau$$

$$mv = \frac{f_0}{n+1} \tau$$

$$\boxed{v_1 = \frac{f_0 \tau}{m(n+1)}}$$

definizione dell'accelerazione

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}}$$

$$\Rightarrow \int_0^\tau a\,dt = v \quad \left[\frac{f_0}{m} \frac{(t/\tau)^{n+1}}{(n+1)} \Big|_0^\tau = v\right]$$

$$\Delta E_M^{(P_1-P_0)} = \frac{1}{2} m \frac{v_1^2}{4} + mgh_2 - \frac{1}{2} m \frac{v_1^2}{4} - mgh_1 = 0$$

$$+ \frac{3}{8} \cancel{m}\frac{v_1^2}{g} + \cancel{mg}h_1 = \cancel{mg}h_2$$

$$\boxed{h_2 = h_1 + \frac{3}{8} \frac{v_1^2}{g}} = 2 + \frac{3}{8} \frac{14^2}{9.81} \cong 9.49\,m \checkmark$$

$$\Delta E_M = L^{NC}$$

$$d_3 = \frac{h_3}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow E_M^0 = \frac{1}{2} m \frac{v_1^2}{4} + mgh_2 \qquad (h_3-h_2)/\sin\alpha$$

$$E_M^f = mgh_3 \; L^{NC} = -\int_0^{(h_3-h_2)/\sin\alpha} \mu_d \, mg \cos\alpha \, dx = \mu_d \, mg \, \frac{h_3 - h_2}{\tan\alpha}$$

$$\cancel{+}\left(\frac{1}{8}\cancel{m}\frac{v_1^2}{g}+\cancel{mg}h_2\right)=\cancel{+}h_3\left(\frac{\mu d\,\cancel{mg}}{\tan\alpha}+\cancel{mg}\right)$$

$$h_3=\frac{\left(\frac{1}{8g}v_1^2+h_2\right)}{\left(\mu d/\tan\alpha+1\right)}$$

$$\frac{1}{8}m\frac{v_1^2}{\cancel{m}}+mgh_2=mgh_3+h_3\,mg\frac{\mu d}{\tan\alpha}-h_2\frac{\mu d\,mg}{\tan\alpha}.$$

$$\cancel{mg}h_3\cancel{\left(1+\frac{\mu d}{\tan\alpha}\right)}=\frac{\frac{1\cancel{m}}{8}\frac{v_1^2}{g}}{\left(1+\frac{\mu d}{\tan\alpha}\right)}+\cancel{mg}h_2\cancel{\left(1+\frac{\mu d}{\tan\alpha}\right)}$$

$$\boxed{h_3=h_2+\frac{1}{8g}\frac{v_1^2}{\left(1+\frac{\mu d}{\tan\alpha}\right)}}$$