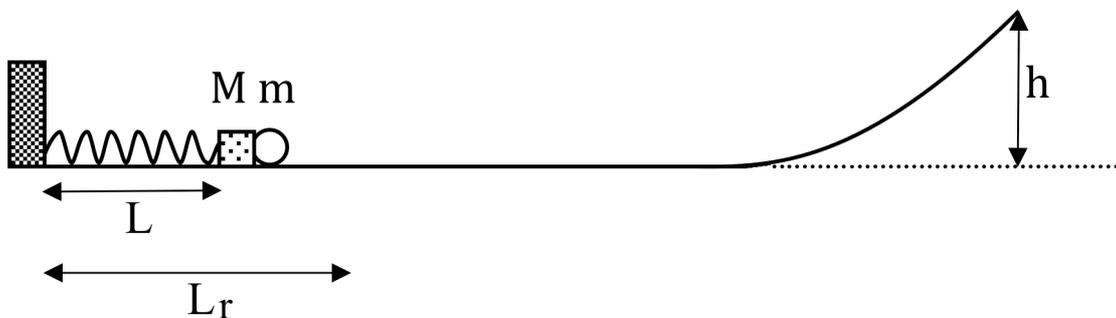


### Problema

Una molla di massa trascurabile, costante elastica  $k = 95 \text{ N/m}$  e lunghezza a riposo  $L_r = 34 \text{ cm}$  è fissata ad una parete. All'altro capo della molla è fissata una massa  $M = 68 \text{ g}$  (punto materiale). La molla è compressa fino alla lunghezza  $L = 22 \text{ cm}$  come in figura, e sulla massa  $M$ , ferma, è appoggiata una seconda massa  $m = 84 \text{ g}$  (punto materiale). Ad un certo istante la molla viene lasciata libera. Sapendo che le due masse possono muoversi senza attrito lungo la guida, costituita da un primo tratto orizzontale seguito da una parte ricurva che termina ad una quota  $h = 18 \text{ cm}$  con un angolo di  $45^\circ$  rispetto al piano orizzontale (vedi figura), determinare:

- 1) dopo quanto tempo la molla attraversa per la prima volta la sua posizione di riposo;
- 2) qual è la velocità  $V$  della pallina  $m$  al momento del distacco dal blocchetto  $M$ ;
- 3) qual è la legge oraria del blocchetto  $M$  dopo il distacco della massa  $m$ , se l'istante  $t=0$  è fissato al momento del distacco;
- 4) con quale velocità la massa  $m$  arriva alla fine della guida;
- 5) a quale quota massima  $H$  arriva la massa  $m$  dopo il distacco dalla guida e qual è la sua velocità in quell'istante.



### Soluzione

Prima del distacco il moto è armonico con periodo  $T = 2\pi\sqrt{(M+m)/k}$  e ampiezza  $A = |L_r - L| = 12$  cm; le masse rimangono a contatto finché la forza impressa dalla molla è rivolta verso destra, cioè finché la molla raggiunge la lunghezza di riposo; poi la forza della molla cambia verso, la massa  $M$  viene trattenuta e rallentata dalla molla, e invece la massa  $m$ , che è libera, si stacca e prosegue ad andare avanti di moto rettilineo uniforme con la stessa velocità che aveva al momento del distacco ( $t = 0$ ); dopo il distacco  $M$  si muove ancora di moto armonico, ma con periodo  $T' = 2\pi\sqrt{M/k}$  più corto di prima, perché adesso la massa  $m$  non c'è più. Ecco quindi le risposte:

1) il passaggio per la lunghezza di riposo avviene dopo  $T/4 = 0.063$  s ;

2) dalla conservazione dell'energia si ottiene la velocità  $V$  al momento del

$$\text{distacco: } \frac{1}{2}k(L_r - L)^2 = \frac{1}{2}(m + M)V^2 \Rightarrow V = (L_r - L)\sqrt{\frac{k}{m + M}} = 3.0 \text{ m/s ;}$$

3) dopo il distacco la massa  $M$  si muove con moto armonico di frequenza

$$\omega_M = \frac{2\pi}{T'} = \sqrt{\frac{k}{M}} ; \text{ la legge oraria è } X(t) = \frac{V}{\omega_M} \sin \omega_M t \text{ con origine nella}$$

posizione di riposo ; da notare che l'ampiezza è minore di quando le due masse

$$\text{viaggiavano insieme: } A' = \frac{V}{\omega_M} = \sqrt{\frac{M}{M + m}}|L_r - L| < A = |L_r - L|.$$

4) dalla conservazione dell'energia per  $m$  si ottiene la sua velocità a fine piano

$$\text{inclinato: } \frac{1}{2}mv_h^2 = \frac{1}{2}mV^2 - mgh \Rightarrow v_h = \sqrt{V^2 - 2gh} = 2.3 \text{ m/s e } \vec{v} \equiv \left( \frac{v_h}{\sqrt{2}}, \frac{v_h}{\sqrt{2}} \right)$$

5) dopo il distacco dalla guida, nel punto più alto, la componente verticale della

velocità di  $m$  è zero, quella orizzontale (costante) è  $v_h/\sqrt{2}$ ; poiché l'energia

$$\text{meccanica si conserva, } \frac{1}{2}mv_h^2 + mgh = \frac{1}{2}m\frac{v_h^2}{2} + mgH \Rightarrow H = \frac{v_h^2}{4g} + h = 32 \text{ cm.}$$