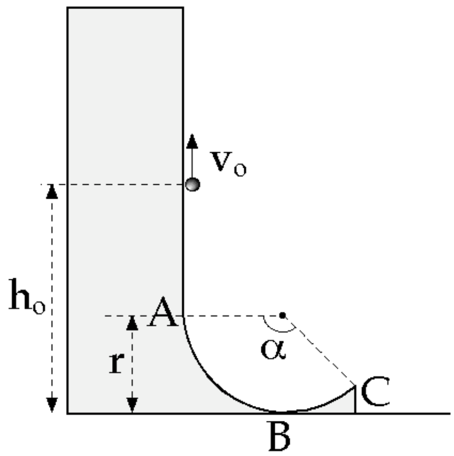
Problema 1

Un punto materiale di massa **M = 100 g**, inizialmente a quota **h_o = 40 m** dal suolo, viene lanciato verso l'alto, lungo la verticale, con velocità di modulo **v_o = 200 m/s** (vedi figura). Sotto l'azione della forza peso esso rallenta, raggiunge una quota massima e poi ricade lungo la verticale, finché, a quota **r = 10 m** dal suolo (cioè nel punto A della figura), incontra una guida circolare ABC, solidale col suolo. La guida è un arco di circonferenza di raggio r che in A ha tangente verticale e in B tangente orizzontale; il raggio passante dall'estremo A forma un angolo α = 135˚ con quello passante dall'altro estremo C.

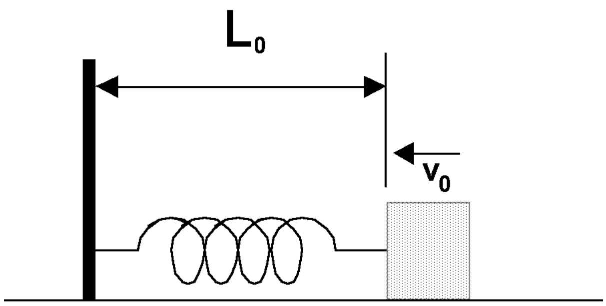


Trascurando la resistenza dell'aria e l'attrito del punto materiale con la guida, calcolare:

1. quanto tempo dopo il lancio il punto materiale raggiunge la quota massima
2. la velocità del punto materiale quando transita in B
3. la reazione vincolare esercitata dalla guida sul punto materiale quando esso transita in B
4. quale quota massima raggiunge il punto materiale dopo aver lasciato la guida in C

Problema 2

L'estremo libero di una molla di costante elastica **k = 10.0 N/m** è connesso (vedi figura) ad una massa **M = 4.00 Kg**. L'altro estremo è fissato ad una parete. La massa poggia su un piano orizzontale. All'istante t = 0 la massa ha velocità **v_o = 5.00 m/s** (direzione e verso: come in figura), mentre la molla si trova alla sua lunghezza di riposo **L_o = 4.00 m**.



Calcolare:

1. la minima distanza L_1 raggiunta dalla massa nella sua corsa verso la parete (corrispondente alla massima compressione della molla) nell'ipotesi che, fra massa M e piano d'appoggio, non vi sia attrito
2. la minima distanza L_2 raggiunta dalla massa nella sua corsa verso la parete (corrispondente alla massima compressione della molla) nell'ipotesi che invece, fra massa M e piano d'appoggio, vi sia attrito, con coefficiente di attrito dinamico **μ_d = 0.25**
3. il minimo valore del coefficiente di attrito statico μ_s tale che il corpo, dopo aver compresso al massimo la molla nelle condizioni descritte nella domanda 2, rimanga fermo.

Soluzioni al problema 1

Definiamo x l'asse orizzontale (orientato verso destra) ed y l'asse verticale (verso l'alto); lo zero di quest'ultimo corrisponde al suolo.

1. Subito dopo il lancio il punto materiale si muove con legge oraria $x(t)$ = costante, $v_x(t) = 0$; $y(t) = h_o + v_o t - (1/2)\, gt^2$, $v_y(t) = v_o - gt$. La quota massima è raggiunta nell'istante t_M in cui si annulla la velocità verticale: $v_y(t_M) = 0 \rightarrow$ $\mathbf{t_M = v_o /g = 20.4s}$ [quota massima $y_M = y(t_M) = h_o + v_o^2 / (2g) = 2079$ m].

2. La velocità con cui il punto transita in B si può ricavare dalla conservazione dell'energia meccanica: $K_B - K_M = Mg\, [y_M - y_B]$; siccome $K_M = 0$ e $y_B = 0$, si ottiene $\rightarrow$ $\mathbf{v_B = \sqrt{(2gy_M)} = 202}$ **m/s.**

3. Nel punto B la reazione vincolare della guida è diretta verso l'alto e, oltre a contrastare la forza peso Mg, deve fornire la forza centripeta $M\, v_B^2 / r$; quindi ha modulo $\rightarrow$ $\mathbf{R_N = M\, (g + v_B^2 / r) = 409}$ **N.**

4. Per avere la velocità del punto materiale in C applichiamo ancora la conservazione dell'energia meccanica: $K_C - K_B = Mg\, [y_B - y_C]$ $\rightarrow$ $(1/2)M\, v_C^2 - (1/2)M\, v_B^2 = - Mg\, r\, (1 - \cos 45°)$. Quindi il modulo della velocità in C è $v_C = \sqrt{[v_B^2 - 2g\, r\, (1 - \cos 45°)\,]}$ e la sua direzione è tangente alla guida in C, a 45° rispetto all'asse x: $v_{Cx} = v_{Cy} = v_C/\sqrt{2}$. Lungo x non ci sono forze e v_x è conservata; lungo y la conservazione dell'energia dà $(1/2)Mv_{Cy}^2 + Mgy_C = Mgh_{max}$, da cui si ottiene $h_{max} = y_C + [v_{Cy}^2/(2g)]$ $\rightarrow$
   $\rightarrow$ $\mathbf{h_{max} = (1/2)y_M + r[(\sqrt{2}-1)/(2\sqrt{2})] = 1041}$ **m.**

Soluzioni al problema 2

1. In assenza di attrito si conserva l'energia meccanica. Dalla condizione $(1/2)Mv_o^2 = (1/2)K\Delta L_1^2$ ricaviamo $\Delta L_1 = L_o - L_1 = v_o\sqrt{(M/K)}$ $\rightarrow$ $\mathbf{L_1 = L_o - v_o\sqrt{(M/K)} = 0.838}$ **m** $\mathbf{(|\Delta L_1| = 3.16}$ **m).**

2. Nel caso con l'attrito parte dell'energia cinetica iniziale è dissipata nel lavoro della forza d'attrito F_{Ad}. Vale la relazione $(1/2)K\Delta L_2^2 = (1/2)Mv_o^2$ + Lavoro forza attrito $\rightarrow$ $(1/2)Mv_o^2 = (1/2)K\Delta L_2^2 + \mu_d\, M\, g\, \Delta L_2$, dalla quale, detta $x = \mu_d Mg/k$, si ottiene $\Delta L_2 = - x \pm \sqrt{[x^2+(Mv_o^2/k)]}$; va scelta la soluzione col segno piú, che dà $\rightarrow$ $\mathbf{L_2 = L_o + x - \sqrt{[x^2+(Mv_o^2/k)]} = 1.67}$ **m** ($\mathbf{|\Delta L_2| = 2.33}$ **m**). Che sia la scelta giusta si vede dal fatto che per $\mu_d = 0$ si ha $x = 0$ e $L_2 = L_1$.

3. Nelle condizioni indicate al punto 2., la compressione massima ΔL_2 corrisponde all'istante in cui la velocità si annulla (la massa si ferma). In quell'istante sulla massa agiscono forza elastica $F_E = - K\, \Delta L_2$ e forza di attrito statico F_{As} , il cui valore massimo è pari a μ_s M g. Affinché, una volta arrestata, la massa resti ferma, dev'essere $F_{As} \geq F_E$ $\rightarrow$ $\mathbf{\mu_s \geq (K\, \Delta L_2)/\, (Mg) = 0.594}$.