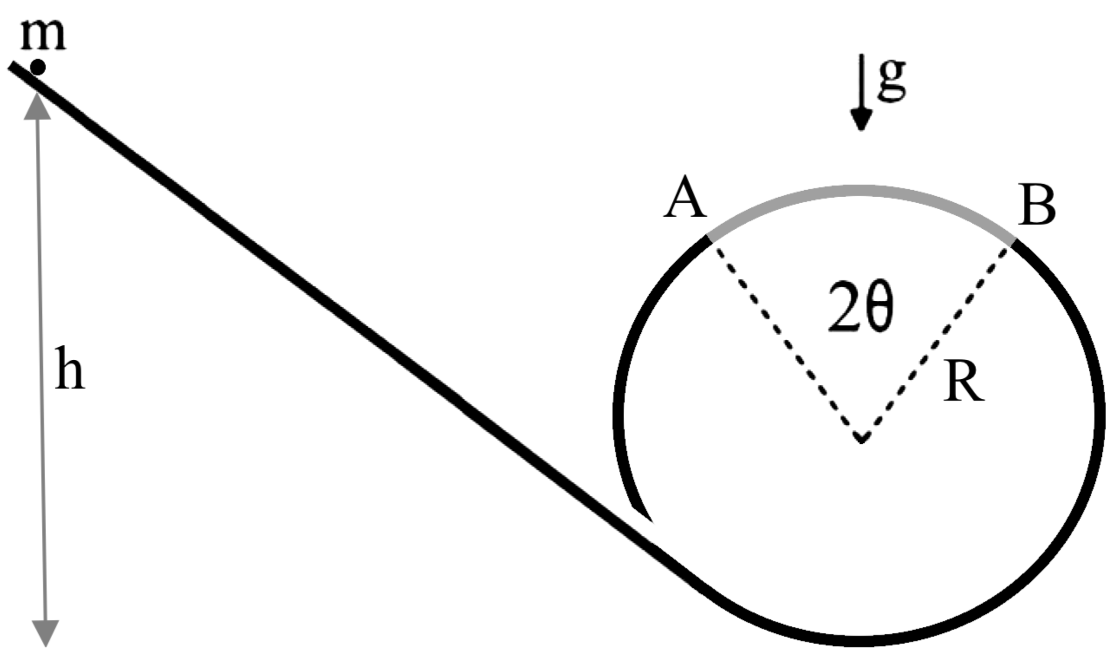
Problema



Una pallina di dimensioni trascurabili e massa m è posta su una guida inclinata, priva di attrito, che termina con un anello circolare di raggio R; la quota h da cui parte (a velocità iniziale nulla) è la minima necessaria a farle percorrere la guida senza mai staccarsi da essa.

1. Quanto vale h?

2. Se alla guida viene asportato un arco di circonferenza AB di angolo al centro 2θ (simmetrico rispetto al punto piú alto dell'anello, vedi figura) e la pallina viene nuovamente posta sulla guida inclinata ad altezza h con velocità iniziale nulla, esistono scelte di θ tali che la pallina, dopo aver percorso un tratto in aria, rientri nella guida riprendendo a scorrere in essa? Quali?

Soluzione

1. L'equazione della dinamica è $m\vec{g}+\vec{N}=m\vec{a}$ dove $\vec{N}$ è la reazione vincolare, ortogonale al vincolo (quindi diretta lungo il raggio che istante per istante individua la posizione della pallina sull'anello); $m\vec{g}$ la forza peso, diretta lungo la verticale; $\vec{a}$ l'accelerazione della pallina. Quando la posizione della pallina sull'anello corrisponde a un angolo α con l'asse verticale, la proiezione dell'equazione lungo quel raggio fornisce $mg\cos\alpha + N = mv^2/R$ dove $a = v^2/R$ l'accelerazione centripeta. Che la pallina non si stacchi dalla guida equivale a dire che la reazione vincolare non si annulli ($N \geq 0$) per nessun α: nemmeno nel punto piú alto dell'anello, dove la pallina arriva sempre piú lenta, la quota è $2R$ e l'angolo con la verticale è $\alpha = 0$. In quel punto la condizione $N \geq 0$ diventa $mv^2/R \geq mg$: affinché non si stacchi dalla guida, la pallina deve arrivare in cima all'anello almeno con velocità $v_{\min} = \sqrt{Rg}$; deve perciò partire da una quota h tale che $mgh=\frac{1}{2}\,m\,v_{\min}^2 + 2mgR$, da cui si ottiene che la quota minima è $h=\frac{5}{2}R$.

2. Asportato l'arco AB, la pallina partita a quota $h=\frac{5}{2}R$ esce dalla guida nel punto B, a quota $R\,(1+\cos\theta)$, con energia cinetica $\frac{1}{2}mv^2=mgh-mgR\,(1+\cos\theta)=\frac{5}{2}mgR-mgR\,(1+\cos\theta)$, quindi con modulo quadro della velocità $v^2 = gR(3-\cos\theta)$. Per riprendere la propria corsa nella guida la pallina deve percorrere una parabola tale da "atterrare" nel punto A con velocità orizzontale v_x uguale e con velocità verticale v_y opposta a quella che aveva in B; ciò accade solo se la cima della parabola percorsa dalla pallina si trova a metà strada fra B ed A, ovvero se il tempo Δt che la pallina impiega a volare da B alla quota massima è uguale al tempo impiegato a percorrere metà della distanza orizzontale da B ad A: $\Delta t = v_y/g = R\sin\theta/v_x \Rightarrow v_x v_y = gR\sin\theta$; poiché $v_x = v\sin\theta$ e $v_y = v\cos\theta$ e $v^2 = gR(3-\cos\theta)$, la condizione si traduce nell'equazione $2\cos^2\theta-3\cos\theta+1 = 0$ che ha le due soluzioni $\cos\theta=\frac{1}{2}$, ovvero $\theta=60^\circ$, e $\cos\theta=1$ ovvero $\theta=0$ (soluzione banale: arco di misura nulla = nessuna interruzione della guida).