V ESERCITAZIONE

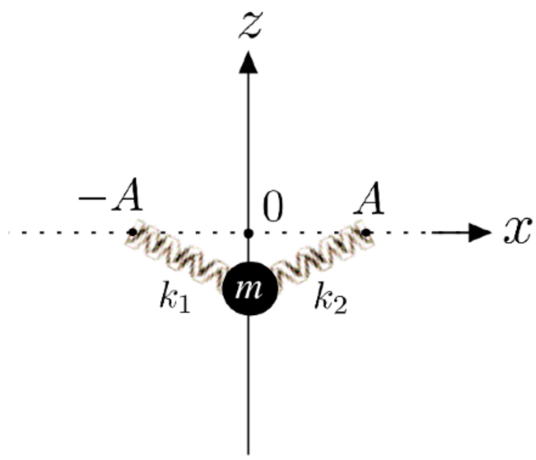
I. 2 MOLLE

1. Una massa m, vincolata a muoversi lungo l'asse verticale z, è soggetta alla forza di gravità e a quella di due molle ideali, di lunghezza di riposo nulla e constanti elastiche k_1 e k_2, rispettivamente fissate, all'altra estremità, nei punti $x = -A$, $z=0$ e $x = A$, $z=0$, come mostrato in figura. In questa prima parte dell'esercizio il vincolo è supposto liscio. I dati del foglio personale e le risposte da fornire sono in unità SI.

    a) Determinare la posizione di equilibrio z_0 della massa m e la reazione vincolare normale R_n. **(6 punti)**

    b) Determinare la variazione di energia potenziale della massa m fra la posizione di equilibrio z_0 e la posizione $z=0$. **(6 punti)**

    c) Determinare la legge temporale $z=z(t)$ che regola il moto della massa m se all'istante $t=0$ essa viene lasciata libera, senza velocità iniziale, nella posizione $z=0$. **(6 punti)**



2. Supponiamo, in questa seconda parte, che il sistema da studiare sia lo stesso, ma il vincolo sia ora scabro, con coefficienti di attrito statico μ_s e dinamico μ_d. In tal caso

    a) Determinare il modulo della forza minima che occorre applicare alla massa m per spostarla dal punto di equilibrio z_0 trovato nella prima parte dell'esercizio. **(6 punti)**

    b) Determinare il punto piú basso z_{min} a cui arriverà la massa m se essa viene lasciata libera, senza velocità iniziale, nella posizione $z=0$. **(6 punti)**

Soluzione

Scriviamo le equazioni dell'equilibrio per la massa m:

$$k_2 A - k_1 A + R_n = 0 \;\rightarrow\; R_n = (k_1 - k_2)A \tag{1}$$

$$-\,mg - k_2 z_0 - k_1 z_0 = 0 \;\rightarrow\; z_0 = -\frac{mg}{k_1 + k_2} \tag{2}$$

da cui si vede come le risultanti delle forze elastiche lungo l'asse x ed y possano essere trattate complessivamente come due oscillatori di costante elastica $\Delta k = (k_1 - k_2)$ e $k = k_1 + k_2$ rispettivamente.

La variazione di energia potenziale é legata alla variazione di energia elastica:

$$E_p(z_0) - E_p(0) = -E_e(z_0) = -\frac{1}{2} k z_0^2 \tag{3}$$

considerato che in $z = 0$ l'energia elastica é nulla.

La soluzione generale dell'equazione del moto per l'oscillatore pesante é:

$$z(t) = z_0 + A_0 \cos(\omega t + \phi)\,, \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{4}$$

Le condizioni iniziali da imporre sono $z(0) = 0$ e $\dot{z}(0) = 0$, da cui si ottiene:

$$z(t) = z_0\left(1 - \cos(\omega t)\right)\,, \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5}$$

Per spostare la massa m dal punto di equilibrio occorre che:

$$F_{\min} = F_{a,\max} = \mu_s R_n = \mu_s \Delta k A \tag{6}$$

poiché in z_0 la risultante di forza elastica e forza peso é nulla.

La variazione di energia meccanica tra $z = 0$ e $z_{\min}$ é pari al lavoro della forza di attrito (**NB:**$z_{\min} < 0$):

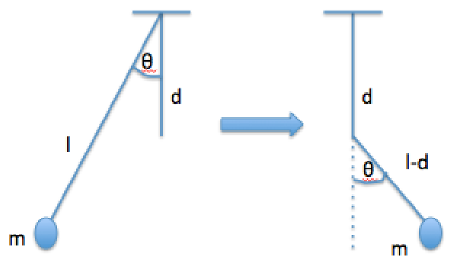
$$\frac{1}{2} k z_{\min}^2 + mg z_{\min} = \mu_d \Delta k\, A z_{\min} \tag{7}$$

da cui $z_{\min} = 2(\mu_d \Delta k/k\, A - mg/k) > 2z_0$.

II. PENDOLO A 2 LUNGHEZZE

Consideriamo un punto materiale di massa m vincolato all'estremità di una corda di lunghezza l inizialmente fermo in corrispondenza di un piccolo angolo θ_0 alla sinistra della verticale. Alla destra si trova un piano verticale di altezza $d < l$, che ha l'effetto pratico di accorciare la lunghezza della corda, quando questa oscilla sul lato destro. Utilizzando la conservazione dell'energia, si determini:

- la velocità angolare del punto materiale quando $\theta = 0$ per la prima volta;
- l'angolo massimo θ_1 che si ha sul lato destro in corrispondenza della massima ampiezza;
- la velocità del punto materiale quando $\theta = 0$ per la seconda volta.



Soluzione

L'energia potenziale nel punto iniziale é pari all'energia cinetica in $\theta = 0$:

$$mgl(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 l^2 \;\rightarrow\; \omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{l}(1-\cos\theta_0)} \tag{8}$$

L'energia potenziale nel punto iniziale é pari all'energia potenziale in θ_1:

$$mgl(1-\cos\theta_0) = mg(l-d)(1-\cos\theta_1) \;\rightarrow\; \cos\theta_1 = 1 - \frac{l}{l-d}(1-\cos\theta_0) \tag{9}$$

L'energia potenziale nel punto iniziale é pari all'energia cinetica in $\theta = 0$. Questa volta, peró, $v_1 = \omega_1(l-d)$:

$$mgl(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2}m\omega_1^2(l-d)^2 \;\rightarrow\; \omega_1 = \sqrt{\frac{2gl}{(l-d)^2}(1-\cos\theta_0)} = \omega_0\frac{l}{l-d} \tag{10}$$

Nota

Nel limite di piccole oscillazioni, possiamo espandere il coseno in serie di Taylor:

$$\cos\theta \sim 1 - \frac{\theta^2}{2} \tag{11}$$

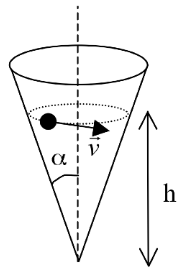
e ottenre le seguenti espressioni per le grandezze calcolate in precedenza:

$$\omega_0 \sim \sqrt{\frac{g}{l}\theta_0}\,;\ \cos\theta_1 \sim 1 - \frac{1}{2}\frac{l}{l-d}\theta_0^2\,;\ \omega_1 \sim \theta_1\sqrt{\frac{g}{l-d}} \tag{12}$$

III. IMBUTO

Sulla parete interna di un imbuto (θ=20^0) può scivolare senza attrito una pallina puntiforme di massa *m=0.1kg*. Se la pallina compie una traiettoria circolare orizzontale di velocità uniforme ad una quota *h=10cm* dal vertice inferiore dell'imbuto (vedi disegno) calcolare:

1. la reazione vincolare dell'imbuto sulla pallina;
2. la velocità v della pallina;
3. l'accelerazione tangenziale e centripeta della pallina.



Soluzione

Scegliamo un sistema di riferimento con origine nella pallina, asse x diretto lungo il raggio della traiettoria circolare e asse y verticale. Le equazioni del moto sono:

$$-mg + R_n \sin\alpha = 0 \tag{13}$$

$$R_n \cos\alpha = m\frac{v^2}{R} \tag{14}$$

da cui $R_n = \frac{mg}{\sin\alpha}$ e $v^2 = \frac{Rg}{\mathrm{tg}\alpha}$.

L'accelerazione tangenziale é nulla, poiché la pallina si muove con velocitá uniforme. L'accelerazione centripeta é $a_c = v^2/R = g/\mathrm{tg}\alpha$.

Nota

Osserviamo che, in modo del tutto equivalente, si puó scegliere un sistema di riferimento con asse y ortogonale alla superficie interna del cono e asse x diretto lungo il piano inclinato. Occorre peró tenere presente che, in questo caso, l'accelerazione centripeta si decompone lungo x e y:

$$-mg\sin\alpha + R_n = ma_{c,y} = m\frac{v^2}{R}\cos\alpha \tag{15}$$

$$mg\cos\alpha = ma_{c,x} = m\frac{v^2}{R}\sin\alpha \tag{16}$$

da cui

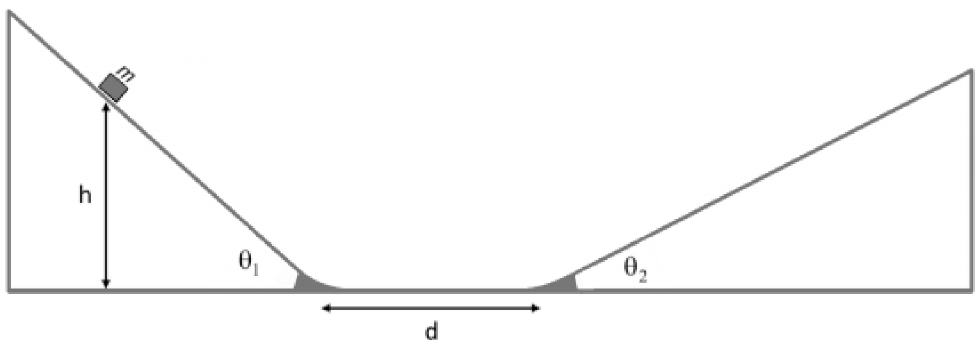
$$v^2 = \frac{Rg}{\mathrm{tg}\alpha} \tag{17}$$

$$R_n = \frac{mg(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{mg}{\sin\alpha} \tag{18}$$

IV. 2 PIANI INCLINATI

Un punto materiale di massa m è posto inizialmente in quiete ad altezza h su di un piano inclinato liscio (che forma un angolo θ_1 rispetto al piano orizzontale) e viene lasciato libero di muoversi. Tale piano inclinato è seguito da un tratto orizzontale di lunghezza d che a sua volta è seguito da un altro piano inclinato liscio che forma con lorizzontale un angolo θ_2. (Si supponga che nei punti in cui cambia la pendenza, gli spigoli siano sempre abbastanza arrotondati da non creare discontinuitá al moto del punto materiale).

- Se il tratto orizzontale fosse privo di attrito quanto varrebbe la velocità del punto materiale su di esso? A quale altezza si fermerebbe il punto materiale sul secondo piano?
- Se il tratto orizzontale fosse in realtà scabro con coefficiente di attrito dinamico μ_d, a che altezza si fermerebbe il punto materiale sul secondo piano inclinato?
- Se anche i due piani inclinati dell'esercizio possedessero attrito dinamico con medesimo coefficiente μ_d ed il punto materiale riuscisse ad arrivare fino al secondo piano inclinato, a che altezza si fermerebbe?



Soluzione

L'energia potenziale iniziale si converte interamente in energia cinetica nel tratto orizzontale, se questo é privo di attrito:

$$mgh = \frac{1}{2} m v_d^2 \;\rightarrow\; v_d = \sqrt{2gh} \tag{19}$$

L'altezza raggiunta sul secondo piano inclinato si ottiene osservando che l'energia potenziale iniziale si converte interamente in energia potenziale finale, se siamo in assenza di attrito:

$$mgh = mgh_2 \; \rightarrow \; h_2 = h \tag{20}$$

Se il tratto orizzontale fosse scabro, la variazione di energia potenziale sarebbe pari al lavoro compiuto dalla forza di attrito:

$$mg(h_2 - h) = -\mu_d mgd \; \rightarrow \; h_2 = h - \mu_d \, d \tag{21}$$

Se anche i due piani inclinati fossero scabri, con medesimo μ_d, allora:

$$mg(h_2 - h) = -\mu_d mg(\cos\theta_1 \frac{h}{\sin\theta_1} + d + \cos\theta_2 \frac{h_2}{\sin\theta_2}) \tag{22}$$

da cui:

$$h_2 = \frac{h - \mu_d(h\mathrm{cotg}\theta_1 + d)}{1 + \mu_d \mathrm{cotg}\theta_2} \tag{23}$$

Nota

Osserviamo che, per poter raggiungere il secondo piano, il corpo deve partire da un'altezza h tale che $h_2 > 0$:

$$h - \mu_d(h\mathrm{cotg}\theta_1 + d) > 0 \; \rightarrow \; h > \frac{\mu_d d}{1 - \mu_d \mathrm{cotg}\theta_1} \tag{24}$$

purché $\mu_d \leq \mathrm{tg}\theta_1$ oppure $\theta_1 \geq \mathrm{arctg}(\mu_d)$.