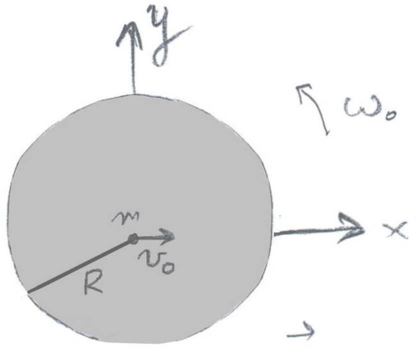
nel riferimento S, inerziale:



piattaforma rotante nel piano x y con velocità angolare ω_0, quindi $\vec{\omega}_0 = (0,0,\omega_0)$; nel disegno $\omega_0 > 0$

$\vec{f} = 0$

$\vec{v}_0 =$ costante $= (v_0, 0, 0)$, $\vec{r}_0 = (r_0, 0, 0)$

$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t = (v_0 t, 0, 0)$ $\quad v_0 > 0$

il blocchetto esce dalla piattaforma quando $v_0 t = R$; nello stesso tempo la piattaforma è ruotata di un angolo $\theta = \omega_0 t = \frac{\omega_0 R}{v_0}$; essendo $v_0 > 0$ arbitrario il blocchetto uscirà dopo un numero (frazionario) $n = \frac{\omega_0 R}{2\pi v_0}$ di giri: se v_0 è "grande" $\left(v_0 > \frac{\omega_0 R}{2\pi}\right)$ uscirà dopo meno di un giro; se è "piccolo" $\left(v_0 < \frac{\omega_0 R}{2\pi}\right)$ uscirà dopo uno o più giri.

Nel riferimento S' rotante con la piattaforma:

trasformazione della traiettoria da S a S'

$$\begin{cases} r'(t) = r(t) = v_0 t \\ \theta'(t) = -\omega_0 t \end{cases}$$

(uso le coordinate polari nel piano x'y' del riferimento S', definite qui sotto)

$$\begin{cases} x'(t) = r'(t)\cos\theta'(t) = v_0 t\cos(-\omega_0 t) = v_0 t\cos\omega_0 t \\ y'(t) = r'(t)\sin\theta'(t) = v_0 t\sin(-\omega_0 t) = -v_0 t\sin\omega_0 t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}'(t) = v_0\cos\omega_0 t - \omega_0 v_0 t\sin\omega_0 t \\ \dot{y}'(t) = -v_0\sin\omega_0 t - \omega_0 v_0 t\cos\omega_0 t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}'(t) = -\omega_0 v_0\sin\omega_0 t - \omega_0 v_0\sin\omega_0 t - \omega_0^2 v_0 t\cos\omega_0 t \\ \ddot{y}'(t) = -\omega_0 v_0\cos\omega_0 t - \omega_0 v_0\cos\omega_0 t + \omega_0^2 v_0 t\sin\omega_0 t \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \ddot{x}'(t) = -\omega_0^2 v_0 t\cos\omega_0 t - 2\omega_0 v_0\sin\omega_0 t \\ \ddot{y}'(t) = \omega_0^2 v_0 t\sin\omega_0 t - 2\omega_0 v_0\cos\omega_0 t \end{cases}$$

ovvero, poichè $x'(t) = v_0 t\cos\omega_0 t$, $y'(t) = -v_0 t\sin\omega_0 t$;
$v_0\cos\omega_0 t = \dot{x}' - \omega_0 y'$, $v_0\sin\omega_0 t = -\dot{y}' - \omega_0 x'$

$$\begin{cases} \ddot{x}'(t) = -\omega_0^2 x'(t) - 2\omega_0\left[-\dot{y}'(t) - \omega_0 x'(t)\right] = +\omega_0^2 x'(t) + 2\omega_0\dot{y}'(t) \\ \ddot{y}'(t) = -\omega_0^2 y'(t) - 2\omega_0\left[\dot{x}'(t) - \omega_0 y'(t)\right] = +\omega_0^2 y'(t) - 2\omega_0\dot{x}'(t) \end{cases}$$

Discussione della traiettoria vista in S':

▷ la distanza assoluta del punto dall'origine cresce linearmente nel tempo $r'(t) = v_0 t$ ma il moto non è rettilineo uniforme bensì spiraliforme, perchè anche l'angolo fra la semiretta che unisce l'origine di S' con il punto mobile $\theta'(t) = -\omega_0 t$ cresce linearmente nel tempo, con segno opposto a quello della rotazione di S' in S.

▷ nel sistema S' l'accelerazione del punto è in ogni istante $\ddot{x}' = \omega_0^2 x' + 2\omega_0 \dot{y}'$, $\ddot{y}' = \omega_0^2 y' - 2\omega_0 \dot{x}'$; dunque è come se il punto fosse soggetto a una forza apparente

$$\vec{f}' = -m\left[\vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}') + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{v}'\right]$$; infatti, nella geometria e con le condizioni iniziali scelte,

$$-\vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}') = \omega_0^2 \vec{r}' = (\omega_0^2 x', \omega_0^2 y', 0) \quad \text{e}$$

$$2\vec{\omega}_0 \times \vec{v}' = 2\begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ \dot{x}' & \dot{y}' & 0 \end{pmatrix} = (-\omega_0 \dot{y}', \omega_0 \dot{x}', 0)$$

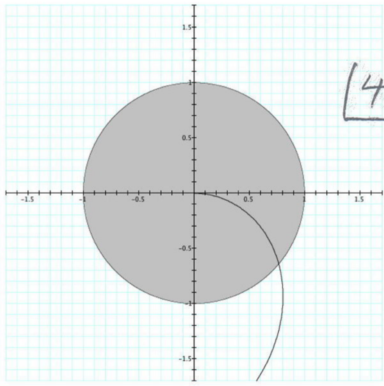
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{10}\,s^{-1}$$
$$R = 1\,m$$

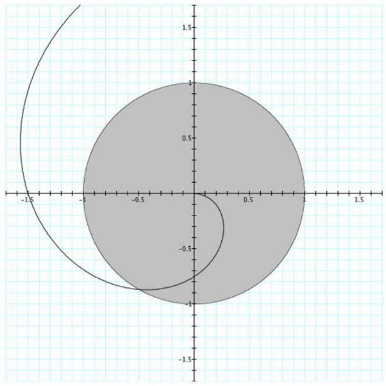
$$\boxed{\begin{cases} r'(t) = r(t) = v_0 t \\ \theta'(t) = -\omega_0 t \end{cases} \qquad \theta' = -\frac{\omega_0}{v_0}\, r'}$$

questa curva si chiama "spirale di Archimede"

$v_0 = 0.9\ m/s$

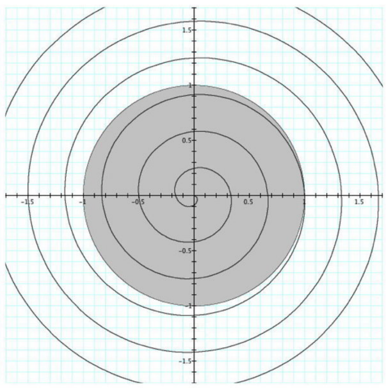
$$\frac{\omega_0}{v_0} = \frac{2\pi}{9R}$$
$$\frac{\omega_0 R}{2\pi v_0} = \frac{1}{9} \ll 1$$





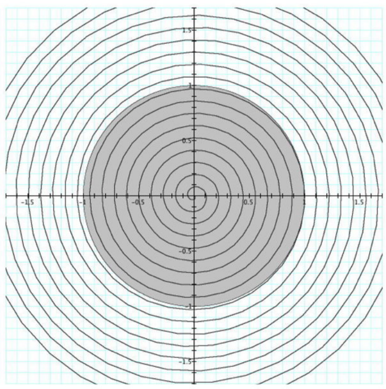
$v_0 = 0.3\ m/s$

$$\frac{\omega_0}{v_0} = \frac{2\pi}{3R}$$
$$\frac{\omega_0 R}{2\pi v_0} = \frac{1}{3} < 1$$



$v_0 = 3.33 \times 10^{-2}\ m/s$

$$\frac{\omega_0}{v_0} = \frac{6\pi}{R}$$
$$\frac{\omega_0 R}{2\pi v_0} = 3 > 1$$



$v_0 = 1.11 \times 10^{-2}\ m/s$

$$\frac{\omega_0}{v_0} = \frac{18\pi}{R}$$
$$\frac{\omega_0 R}{2\pi v_0} = 9 \gg 1$$