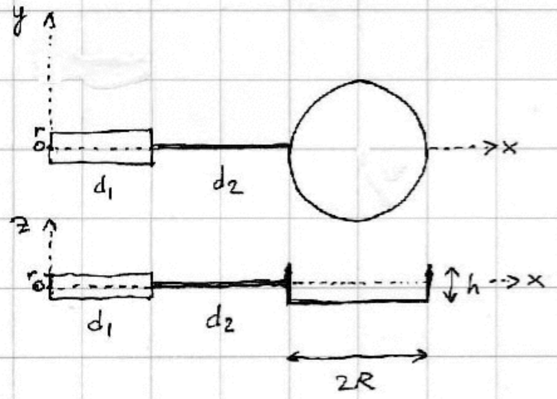
PADELLA



1 = manico cilindrico di legno ρ_L

2 = bacchetta di ferro λ_F

3 = mantello cilindrico della padella σ_A

4 = fondo circolare della padella σ_A

$M_1 = \rho_L \pi r^2 d_1 \qquad \vec{r}_{c_1} = \left(\frac{d_1}{2}, 0, 0\right)$

$M_2 = \lambda_F d_2 \qquad \vec{r}_{c_2} = \left(d_1 + \frac{d_2}{2}, 0, \right)$

$M_3 = \sigma_A 2\pi R h \qquad \vec{r}_{c_3} = \left(d_1 + d_2 + R, 0, 0\right)$

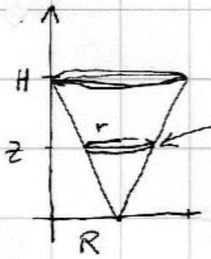
$M_4 = \sigma_A \pi R^2 \qquad \vec{r}_{c_4} = \left(d_1 + d_2 + R, 0, -\frac{h}{2}\right)$

$$\vec{r}_c = \frac{M_1 \vec{r}_{c_1} + M_2 \vec{r}_{c_2} + M_3 \vec{r}_{c_3} + M_4 \vec{r}_{c_4}}{M_1 + M_2 + M_3 + M_4} =$$

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{M_1 \frac{d_1}{2} + M_2\left(d_1 + \frac{d_2}{2}\right) + (M_3 + M_4)(d_1 + d_2 + R)}{M_1 + M_2 + M_3 + M_4} \\ y_c = 0 \\ z_c = \dfrac{-M_4 \frac{h}{2}}{M_1 + M_2 + M_3 + M_4} \end{cases}$$

CONO

A) cono omogeneo tutto intero, di altezza H e raggio di base R



$dm = \rho \pi r^2 dz$

$$r = \frac{R}{H} z \qquad dm = \left(\rho \pi \frac{R^2}{H^2}\right) z^2 dz$$

$$M = \int dm = \int_0^H \left(\rho \pi \frac{R^2}{H^2}\right) z^2 dz =$$

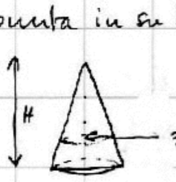
$$= \rho \pi \frac{R^2}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3} = \rho \cdot \left(\frac{1}{3}\pi R^2 H\right)$$

$$M z_c = \int z\, dm = \int_0^H \left(\rho \pi \frac{R^2}{H^2}\right) z^3 dz =$$

$$= \rho \pi \frac{R^2}{H^2} \cdot \frac{H^4}{4} = \rho\left(\frac{1}{3}\pi R^2 H\right) \cdot \frac{3}{4} H =$$

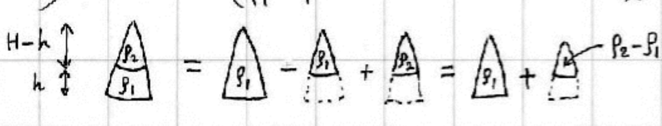
$$= M \cdot \frac{3}{4} H \rightarrow z_c = \frac{3}{4} H.$$

in altre parole, prendendo il cono con la punta in su invece che in giù, si ha



$z_c = \frac{1}{4} H$

B) 2 densità (ρ_1 fino ad altezza h e ρ_2 da h a H):



$$z_c = \frac{M_1 \frac{H}{4} + \Delta M \cdot \left[h + (H-h)\frac{1}{4}\right]}{M_1 + \Delta M}.$$

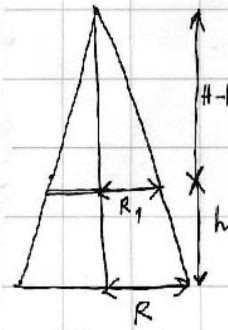
($x_c = y_c = 0$: il c.d.m. è sull'asse del cono)

$$M_1 = \rho_1 \left(\frac{1}{3}\pi R^2 H\right)$$

$$\Delta M = (\rho_2 - \rho_1) \cdot \frac{1}{3}\pi R_1^2 (H-h) =$$

$$= (\rho_2 - \rho_1) \frac{1}{3}\pi R^2 \left(\frac{H-h}{H}\right)^2 (H-h) =$$

$$= (\rho_2 - \rho_1) \frac{1}{3}\pi \left(\frac{R}{H}\right)^2 (H-h)^3.$$



$$R_1 = R \cdot \left(1 - \frac{h}{H}\right)$$

BARCA E PROIETTILE

- Per evitare troppi indici chiamo d'ora in poi con lettere minuscole le proprietà del proiettile e con maiuscole quelle della barca; rispetto ai simboli usati nel testo
  $m_1 = M$, $v_1 = V$, $m_2 = m$, $v_2 = v$
  per lo stesso motivo pongo $\mu_d = \mu$
  Lavoro nel sistema S (inerziale, terraferma e mare)
- Subito prima dello sparo $Q = 0$ (barca e proiettile fermi, quantità di moto nulla)
- Anche subito dopo (lo sparo è un evento impulsivo, forze impulsive solo interne, le forze esterne si trascurano anche quando, come nel caso $\mu \neq 0$, ci sono)
  $$Q = mv + MV = 0 \longrightarrow V = -\frac{m}{M} v$$
- Le posizioni a $t=0$ sono X (centro della barca), x (posizione del proiettile)
  $$X(t=0) = 0 \quad ; \quad x(t=0) = -\frac{L}{2}$$
  La posizione del centro di massa (x_c) a $t=0$ è
  $$x_c = \frac{mx + MX}{m+M} = -\frac{m}{m+M}\frac{L}{2}$$
- Le velocità a $t=0$ (subito dopo lo sparo) sono v e $V = -\frac{m}{M} v$
- Quindi per $t>0$, e prima dell'impatto del proiettile sull'altro estremo della barca, il proiettile si muove di moto rettilineo uniforme verso destra, con velocità
  $v(t) = v = \text{costante}$
  mentre la barca si muove verso sinistra, con velocità decrescente in modulo per effetto dell'attrito. La forza di attrito è $\mu R_N = \mu(m+M)g$ ed agisce sulla barca di massa M $\rightarrow$ $M\dot{V} = \mu(m+M)g$
  Quindi $$V(t) = -\frac{m}{M} v + \frac{m+M}{M}\mu g t$$
  In queste condizioni si danno 3 casi, a seconda dell'entità dell'attrito μ:
  A $\rightarrow$ $\mu = 0$: anche $V = -\frac{m}{M} v$ è costante prima dell'impatto
  B $\rightarrow$ μ debole: la barca rallenta ma è ancora in moto al momento dell'impatto
  C $\rightarrow$ μ forte: la barca rallenta e si ferma prima dell'impatto

(A) $\rightarrow \mu = 0$

In questo caso è facile vedere che $t_F = \frac{L}{v - V} = \frac{M}{m+M}\frac{L}{v}$

$x_f = \frac{L}{2} - \frac{m}{m+M}L$; $X_f = -\frac{mL}{m+M}$; $X_{cF} = \frac{-m}{m+M}\frac{L}{2} = X_{ci}$

Il centro di massa è rimasto fermo, giustamente: la sua velocità subito prima dello sparo era nulla, e, per $\mu=0$, le forze esterne sono nulle $\forall t>0$ quindi v_c resta nulla e il centro di massa non si muove

▷ Come distinguere fra i casi (B) (attrito debole) e (C) (attrito forte)?

Basta trovare la condizione per il caso limite nel quale l'impatto del proiettile sul lato destro avviene nello stesso istante in cui la barca si ferma per effetto dell'attrito

▷ se l'impatto non avvenisse prima, la barca, per il solo effetto dell'attrito, si fermerebbe per $t = t_1 = \frac{m}{m+M}\frac{v}{\mu g}$ (quando $v(t_1) = 0$)

▷ se al momento dell'impatto la barca stesse ancora rallentando, l'impatto avverrebbe per $t = t_2 = \frac{v}{\mu g} - \sqrt{\left(\frac{v}{\mu g}\right)^2 - \frac{2M}{m+M}\frac{L}{\mu g}}$

[Infatti, in tal caso, prima dell'impatto, proiettile e centro barca sono in

$x(t) = -\frac{L}{2} + vt$, $X(t) = -\frac{m}{M}vt + \frac{1}{2}\frac{m+M}{M}\mu g t^2$

il valore di t_2 dato sopra corrisponde alla soluzione dell'equazione di secondo grado che si ottiene imponendo la condizione di impatto

$$x(t) - X(t) = \frac{L}{2}$$

la scelta del segno meno si fa osservando che è quella la soluzione che tende al limite giusto per $\mu \to 0$ (assenza di attrito)]

▷ Eguagliando t_1 e t_2 si ottiene, con un po' di algebra, che, fissati gli altri dati del problema, e definito il valore critico di attrito μ^*

$$\mu^* = \frac{v^2}{2Lg}\frac{m}{M}\frac{m+2M}{m+M}$$

(B) $\rightarrow \mu < \mu^* \Rightarrow t_1 > t_2$, l'impatto avviene prima dell'arresto della barca

(C) $\rightarrow \mu > \mu^* \Rightarrow t_1 < t_2$, l'arresto della barca avviene prima dell'impatto

mentre $\mu = \mu^* \Rightarrow t_1 = t_2 = t^* = \sqrt{\frac{mM}{(m+2M)(m+M)}\frac{2L}{\mu^* g}}$ è il caso critico

(B) $\mu < \mu^*$, attrito debole

▷ Il proiettile in questo caso si conficca nel lato destro della barca, mentre questa sta ancora viaggiando verso sinistra, all'istante $t_i = t_2 = \frac{v}{\mu g} - \sqrt{\left(\frac{v}{\mu g}\right)^2 - \frac{2M}{m+M}\frac{L}{\mu g}}$

La velocità della barca subito prima dell'impatto e la posizione del suo centro sono:

$$V_i = -\frac{m}{M} v + \frac{m+M}{M} \mu g t_i \quad ; \quad X_i = \frac{-m}{M} v t_i + \frac{1}{2}\frac{m+M}{M}\mu g t_i^2$$

quelle del proiettile sono $\quad v \quad$ e $\quad x_i = X_i + \frac{L}{2}$

▷ Nell'impatto si conserva la quantità di moto totale (urto anelastico)
subito dopo l'impatto l'insieme proiettile + barca parte con velocità

$$\tilde{v} = \tilde{V} = v_c = \frac{m v + M V_i}{m+M} = (\text{sostituendo}) = \mu g t_i > 0$$

Cioè parte con velocità verso destra; il risultato poteva essere ottenuto anche calcolando l'impulso totale delle forze esterne $I_{ext} = (m+M) v_c$
dove $I_{ext} = \int_0^{t_i} F_{ext}\, dt = F_{attrito} \cdot t_i = (m+M)\mu g t_i$

▷ Per $t > t_i$ l'insieme barca + proiettile viaggia verso destra rallentando per effetto dell'attrito μ (adesso la forza di attrito attua sull'insieme barca + proiettile, di massa $m+M$, e l'accelerazione è $-\mu g$). Il centro della barca si muove con legge

$$X(t) = X_i + \tilde{V}(t - t_i) - \frac{1}{2}\mu g (t-t_i)^2$$
$$V(t) = \tilde{V} - \mu g (t - t_i)$$

e si ferma quindi per $t - t_i = \frac{\tilde{V}}{\mu g} = \frac{\mu g t_i}{\mu g} = t_i$, ovvero per $t_F = 2 t_i$

▷ La posizione finale del centro della barca è quindi

$$X_f = X_i + \mu g t_i \cdot t_i - \frac{1}{2}\mu g t_i^2 = X_i + \frac{1}{2}\mu g t_i^2 = (\text{sostituendo } X_i)$$
$$= -\frac{m}{M} v t_i + \frac{1}{2}\frac{m+M}{M}\mu g t_i^2 + \frac{1}{2}\mu g t_i^2$$
$$= -\frac{m}{M} v t_i + \frac{1}{2}\frac{m+2M}{M}\mu g t_i^2$$

(c) → $\mu > \mu^*$, attrito forte

▷ La barca si arresta per $t = t_1$ prima che il proiettile si conficchi nella sua estremità destra. Per $t = t_1$ il centro della barca si trova a

$$X_1 = -\frac{m}{M} v t_1 + \frac{1}{2} \frac{m+M}{M} \mu g t_1^2 = -\frac{1}{2} \frac{m}{M} \frac{m}{m+M} \frac{v^2}{\mu g}$$

e il proiettile si trova a $\quad x_1 = -\frac{L}{2} + v t_1 = -\frac{L}{2} + \frac{m}{m+M} \frac{v^2}{\mu g}$

▷ Da questo momento in poi (cioè per $t > t_1$) la barca è ferma col centro in X_1 mentre il proiettile continua a viaggiare a velocità v verso destra. Dunque l'intervallo di tempo dopo t_1 necessario affinché il proiettile raggiunga l'estremità destra della barca è dato da $\left(X_1 + \frac{L}{2} \right) - x_1 = v \Delta t$, che fornisce

$$\Delta t = \left[\frac{L}{v} - \frac{v}{\mu g} \frac{m}{m+M} \left(1 + \frac{m}{2M} \right) \right]$$

▷ Riepilogando: la barca si arresta per $t_1 = \frac{m}{m+M} \frac{v}{\mu g}$ e il proiettile si conficca nel lato destro per $t_i = t_1 + \Delta t$, dove Δt è dato dalla formula qui sopra e t_i indica l'istante dell'impatto

▷ All'istante t_i, subito prima di conficcarsi, la velocità del proiettile è ancora v e la sua posizione è ovviamente $\quad x_i = X_i + \frac{L}{2} = \frac{L}{2} - \frac{1}{2} \frac{m}{M} \frac{m}{m+M} \frac{v^2}{\mu g}$
la velocità V della barca è zero.

▷ Nell'impatto (urto anelastico) si conserva la quantità di moto, quindi subito dopo l'impatto l'insieme proiettile e barca parte con velocità $\tilde{v} = \tilde{V} = v_c = \frac{m}{m+M} v$ soggetto ancora all'attrito μ (accelerazione pari a $-\mu g$)

▷ Il centro della barca, in particolare, si muove con legge

$$X(t) = X_1 + \frac{m}{m+M} v (t - t_i) - \frac{1}{2} \mu g (t - t_i)^2$$

e si ferma definitivamente per $\quad t - t_i = \frac{m}{m+M} \frac{v}{\mu g} \quad \rightarrow t_f = t_i + \frac{m}{m+M} \frac{v}{\mu g}$

▷ La posizione del centro della barca, dopo opportuni sviluppi, è

$$X_f = X_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{m}{m+M} \right)^2 \frac{v^2}{\mu g} = (\text{sostituendo } X_1) =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{m^3}{(m+M)^2 M} \frac{v^2}{\mu g}$$

cioè $X_f < 0$, ovviamente