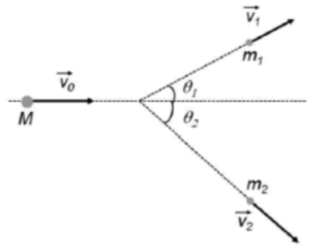
Esercizio 1

Un corpo di massa M procede a velocità v_0 in una zona di spazio esente da forze. Ad un certo istante, tramite un meccanismo di forze interne, la massa M si spezza in due frammenti, di masse m_1 e m_2, che proseguono ambedue con velocità di modulo $|v_1|=|v_2|= v_f$ su traiettorie che formano rispettivamente angoli θ_1 e θ_2 rispetto alla traiettoria del centro di massa (vedi figura). Tenendo conto che la somma delle masse dei due frammenti è pari alla massa iniziale M:

1 Determinare il rapporto tra le masse dei due frammenti m_1/m_2.
2 Determinare il modulo della velocità v_f.



Soluzione

$$M\vec{v}_0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$ Conservazione della quantità di moto

asse x $\rightarrow$ $$M v_0 = m_1 v_f \cos\theta_1 + m_2 v_f \cos\theta_2 \qquad (1)$$

asse y $\rightarrow$ $$0 = m_1 v_f \operatorname{sen}\theta_1 - m_2 v_f \operatorname{sen}\theta_2 \qquad (2)$$

$$(2) \rightarrow \boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}\theta_1}}$$

$$(1) \quad (m_1+m_2)v_0 = m_1 v_f \cos\theta_1 + m_2 v_f \cos\theta_2$$

$$\left(\frac{m_1}{m_2}+1\right)v_0 = \frac{m_1}{m_2} v_f \cos\theta_1 + v_f \cos\theta_2$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}\theta_1}+1\right)v_0 = \left(\frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}\theta_1}\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right)v_f$$

$$(\operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1)v_0 = (\operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_1 + \cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1)v_f = \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)v_f$$

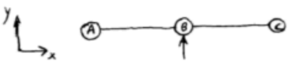
$$\boxed{v_f = \frac{\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)} v_0}$$

Esercizio 2

Nel sistema in figura i tre dischetti A, B, C sono collegati da fili inestensibili di equal lunghezza; le dimensioni dei dischetti sono trascurabili. Inizialmente il sistema è fermo su un piano liscio orizzontale. Al dischetto B viene applicata per un tempo brevissimo una forza perpendicolare ai fili che produce un impulso J=2 N·s (vedi figura 2a). Sapendo che m_A= m_C= 0.3 kg e m_B= 0.4 kg, calcolare:

1 La velocità del centro di massa del sistema.
2 Le velocità di A e C un istante prima che si tocchino (vedi figura 2b).
3 Il lavoro delle forze interne se A e C non si staccano dopo l'urto.

Soluzione



1) L'impulso (J) è eguale alla variazione di quantità di moto del sistema

$$J = M_{TOT}\, v_{CM} = (m_A + m_B + m_C)\, v_{CM}$$ (il sistema inizialmente è fermo) e dopo l'impulso acquisisce una velocità v_{CM}

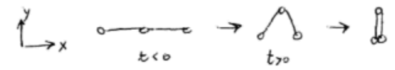
$$v_{CM} = \frac{J}{m_A + m_B + m_C} = \frac{2\ N \cdot s}{1\ kg} = 2\ m/s$$

Dopo l'applicazione di quel impulso iniziale, la velocità del centro di massa, diretta lungo l'asse y, resta costante perchè la risultante delle forze esterne è nulla.

$$M_{TOT}\, \vec{v}_{CM} = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B + m_C \vec{v}_C$$

Inizialmente $v_A = v_C = 0 \qquad v_B \neq 0$

$$v_B = \frac{m_A + m_B + m_C}{m_B}\, v_{CM} = 5\ m/s$$

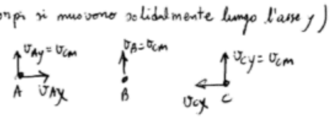
2) 

Quando A e C si tocano (un istante prima del urto)

$v_{Ax} = -v_{Cx}$ (conservazione della quantità di moto lungo l'asse x)

$v_{Ay} = v_B = v_{Cy} = v_{CM}$ (i tre corpi si muovono solidalmente lungo l'asse y)

Quindi $|\vec{v}_A| = |\vec{v}_C|$



Dal istante subito dopo l'applicazione dell'impulso al istante subito prima del urto tra A e C l'energia si conserva

$$\frac{1}{2} m_B v_{B,INI}^2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} m_C v_C^2$$

$$\frac{1}{2} m_B v_{BIN}^2 = \frac{1}{2} m_A (v_{CM}^2 + v_{Ax}^2) + \frac{1}{2} m_B v_{CM}^2 + \frac{1}{2} m_C \left(v_{CM}^2 + v_{Cx}^2 \right)$$

$$\frac{1}{2} m_B v_{BIN}^2 = \frac{1}{2} (m_A + m_C) v_{Ax}^2 + \frac{1}{2} (m_A + m_B + m_C) v_{CM}^2$$

$v_{B,INI} = 5 m/s$, $v_{CM} = 2 m/s \rightarrow v_{Ax} = 3,16\ m/s$

$v_{Ax} = 3,16\ m/s$	$v_{Ay} = 2\ m/s$
$v_{Bx} = 0$	$v_{By} = 2\ m/s$
$v_{Cx} = -3,$[illegible] m/s	$v_{Cy} = 2\ m/s$

velocità dei tre corpi prima del urto tra A e C

3) Prima dell'urto l'energia cinetica del sistema è

$E_{IN} = \frac{1}{2} m_B v_{BIN}^2 = 5\ J$ $(v_A = v_C = 0)$

È interessante notare che

$$E_{IN} = \underbrace{\frac{1}{2}(m_A + m_B + m_C) v_{CM}^2}_{\substack{\text{E.cin del CM} \\ v_{CM} = 2 m/s \\ \downarrow \\ 2J}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_A (v_A^{CM})^2 + \frac{1}{2} m_B (v_B^{CM})^2 + \frac{1}{2} m_C (v_C^{CM})^2}_{\substack{\text{E.cin di A,B,C rispetto al CM} \\ v_A^{CM} = v_C^{CM} = 2 m/s \\ v_B^{CM} = 3 m/s \\ \downarrow \\ 3J}}$$

Dopo l'urto i tre corpi si muovono con $v_A = v_B = v_C = v_{CM}$

$$E_F = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 + \frac{1}{2} m_C v_C^2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B + m_C) v_{CM}^2 = 2\ J$$

L'energia dissipata (lavoro delle forze interne)

$$\Delta E = E_F - E_{INI} = -3\ J$$

Quest'energia corrisponde a l'energia cinetica dei corpi rispetto al CM

Esercizio 3

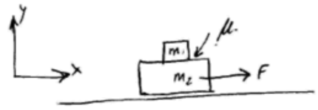
Consideriamo un baule di massa m_1 poggiato su una tavola di legno di massa m_2, a sua volta poggiata su una superficie perfettamente orizzontale gi ghiaccio. Venga ora applicata alla tavola una forza $\vec{F}$ parallela al piano come mostrato in figura. Consideriamo trascurabile (nullo) l'attrito tra la tavola di legno e il ghiaccio, e pari rispettivamente a μ_s e μ_d i coefficienti d'attrito statico e dinamico tra la tavola di legno e il baule. Si determini:

1 L'espressione del valore massimo F_{max} della forza che possiamo applicare se vogliamo che il baule rimanga fermo rispetto alla tavola di legno e l'espressione delle accelerazioni dei due corpi per $F \leq F_{max}$.

2 L'espressione dell'accelerazione dei due corpi per $F \geq F_{max}$.

3 Consideriamo che il baule sia stato poggiato inizialmente al centro della tavola di legno ed entrambi siano inizialmente fermi. Se la lunghezza della tavola di legno è pari a l = 2 m e μ_s = 0.8, μ_d = 0.6, m_1= 10 kg, m_2= 25 kg, calcolare il tempo t_c dall'applicazione della forza F = 300 N al tempo t = 0, dopo il quale il baule cadrà dalla tavola di legno.

Soluzione

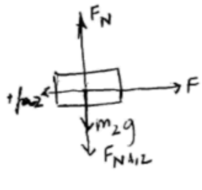


Corpo 1

asse x: $f_{a1} = m a_1$ (1)

asse y: $F_{N2,1} - m_1 g = 0 \rightarrow F_{N2,1} = m_1 g$ (2)

Corpo 2



asse x: $F + f_{a2} = m_2 a_2$ (3)

asse y: $F_N - m_2 g + F_{N1,2} = 0 \rightarrow F_N = (m_1 + m_2) g$ (4)

$F_{N1,2} = -F_{N2,1}$ (5) $f_{a1} = -f_{a2}$ (6)

1) I corpi ~~xx~~ si muovono insieme $(1) \rightarrow F = m_2 a_2 - fa_2 \underset{(6)}{=} m_2 a_2 + fa_1 \underset{(1)}{=} m_2 a_2 + m_1 g$

$$F = m_1 a_2 + m_2 a_1 \underset{a_1 = a_2 = a}{=} (m_1 + m_2)\, a$$

$$m_1 a = fa \leq \mu_s m_1 g \; \cancel{xxx} \rightarrow a \leq \mu_s g$$

$$\boxed{F_{MAX} = (m_1 + m_2)\mu_s g}$$

Per $F \leq F_{max} \rightarrow a = \dfrac{F}{m_1 + m_2}$ Come l'accelerazione di un unico corpo di massa $(m_1 + m_2)$

2) Per $F > F_{MAX}$

Corpo 1 $\quad fa_1 = \mu_d m_1 g = m_1 a_1 \rightarrow \boxed{a_1 = \mu_d g}$

Corpo 2

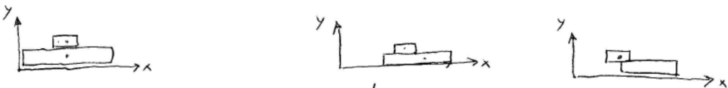
$$F - \mu_d m_1 g = m_2 a_2 \rightarrow \boxed{a_2 = \frac{F - \mu_d m_1 g}{m_2}}$$

3)

Verifichiamo che $F > F_{max}$ $\quad (F = 300N)$

$F_{MAX} = (m_1 + m_2)\mu_s g = (10 + 25)kg \cdot 0'8 \cdot 9'81\, m/s^2 = 274.4N$

Quindi si verifica $F > F_{MAX}$



$t = 0$ $\qquad t > 0 \qquad t = t_F$

Il baule cadrà della tavola di legno quando il suo centro coincida con l'estremità della tavola.

Estremità della tavola $\rightarrow \quad x_2(t) = x_{02} + v_{02} t + \frac{1}{2} a_2 t^2 \underset{x_{02} = 0,\ v_{02} = 0}{=} \frac{1}{2} a_2 t^2$

Centro del baule $\rightarrow \quad x_1(t) = x_{01} + v_{01} t + \frac{1}{2} a_1 t^2 \underset{v_{01} = 0}{=} x_{01} + \frac{1}{2} a_1 t^2$

dove $x_{01} = 1\,m$, $a_1 = \mu_d g = 0'6 \; 9'81\, m/s^2 = 5'89\, m/s^2$

$$a_2 = \frac{300N - 0'6 \cdot 9'81 \cdot 10}{25} = 9,645\ m/s^2$$

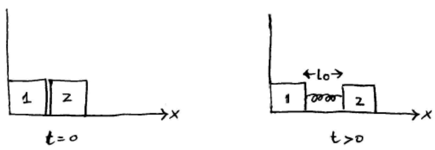
$x_1(t_F) = x_2(t_F) \rightarrow \quad 1 + \frac{1}{2} 5'89\, t_F^2 = \frac{1}{2} 9,645\, t_F^2 \rightarrow t_F = 0,73\,s$

Esercizio 4

Due blocchi identici di massa *m*, assimilabili a punti materiali, sono poggiati su una mensola rigida e liscia, amovibile (ancorata cioè al muro o a terra) come illustrato in figura. Tra i due blocchi è interposta una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo L_0. Nell'istante iniziale la molla è completamente compressa (pannello a sinistra in figura) ed i blocchi sono fermi grazie ad un sistema di bloccaggio. Ad un dato istante si rimuove istantaneamente il sistema di bloccaggio e i due blocchi sono lasciati liberi di muoversi con velocità iniziali nulle. Si determini:

1 Le velocità dei due blocchi, $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ nell'istante in cui la molla è nella posizione di riposo, come illustrato nel pannello di destra della figura.
2 La velocità $\overrightarrow{v_{CM}}$ del centro di massa (CM) del sistema nell'istante in cui la molla è nella posizione di riposo, come illustrato nel pannello di destra della figura. Si illustri il bilancio energetico del processo.
3 Il modulo della reazione vincolare della mensola dall'istante iniziale al momento in cui la molla assume la sua lunghezza di riposo.
4 Si illustri cosa accade dopo l'istante in cui la molla è nella posizione di riposo. In particolare si ricavi la velocità del CM negli istanti successivi.
5 Si verifichi che il moto compiuto dai due blocchi nel sistema di riferimento del CM è un moto armonico e se determini la pulsazione ω.

Soluzione



1| Il sistema è soto l'azione di una forza esterna (la reazione vincolare della mensola sul corpo 1, vedi (4.3)), ma questa forza non realiza lavoro perchè il punto di applicazione rimane fermo. Di conseguenza, l'energia meccanica del sistema si conserva.

$$E_{TOT}^{i} = E_{TOT}^{F}$$

$$K^i + V^i = K^F + V^F \rightarrow \frac{1}{2} m v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m v_{2i}^2 + \frac{1}{2} K L_0^2 = \frac{1}{2} m v_{1F}^2 + \frac{1}{2} m v_{2F}^2 + \overset{V^F=0}{0}$$

en. cinetica

en. elastica della molla

dove $v_{1i} = v_{2i} = 0$ (corpi inizialmente in riposo)

$v_{1F} = 0$ (il corpo 1 non si muove perchè è bloccato per la mensola)

Quindi $\frac{1}{2} K L_0^2 = \frac{1}{2} m v_{2F}^2 \rightarrow \boxed{v_{2F} = L_0 \sqrt{\frac{K}{m}} \quad v_{1F} = 0}$

2]
$$m\vec{v}_{1F} + m\vec{v}_{2F} = (m+m)\vec{V}_{CM,F} \quad \text{quantità di moto totale}$$

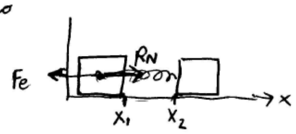
inizialmente $m\vec{v}_{1i} + m\vec{v}_{2i} = (m+m)\vec{V}_{CM\,i} = 0 \rightarrow V_{CM,i} = 0$

Quando la molla è nella posizione di riposo $v_{1F} = 0$, $v_{2F} = L_0\sqrt{\frac{K}{m}}$

$$V_{CM,F} = \frac{1}{2} v_{2F} = \frac{L_0}{2}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

La quantità di moto del sistema non si conserva perchè c'è una forza esterna (reazione vincolare della mensola)

3] Fino a che la molla è nella posizione di riposo L_0, il corpo 1 rimane fermo



La risultante delle forze sul corpo 1 è nulla

$\vec{Fe} + \vec{R_N} = 0$ $\quad$ $\vec{Fe}$ forza elastica della molla
$\vec{R_N}$ reazione vincolare della mensola

In modulo $\quad R_N = Fe = K\left(L_0 - (x_2 - x_1)\right)$

4] Quando la molla è nella posizione di equilibrio $R_N = Fe = 0$

Da quel istante in poi non ci sono forze esterne sul sistema $\Sigma F_{ext} = R_N = 0$

v_{CM} = costante $\rightarrow$ Il centro di massa del sistema continua a muoversi con velocità costante

5] Dal istante in cui la molla è nella posizione di equilibrio le equazioni del moto per il corpo 1 e 2 sono:

$$m\ddot{x}_1 = K(x_2 - x_1 - L_0)$$
$$m\ddot{x}_2 = -K(x_2 - x_1 - L_0)$$

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -2K(x_1 - x_2 - L_0)$$

Coordinata relativa $\quad \Delta x = x_1 - x_2$; $\Delta\ddot{x} = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2$

$$m\Delta\ddot{x} = -2K(\Delta x - L_0) \rightarrow \text{Equazione del moto armonico semplice}$$

pulsazione $\quad \omega = \sqrt{\frac{2K}{m}}$