MOMENTO DI INERZIA DELLA MOLECOLA BIATOMICA

Una molecola è schematizzabile con un corpo rigido costituito di due masse puntiformi M_1 ed M_2 poste alla distanza di equilibrio di legame R. Mostrare che il momento di inerzia della molecola rispetto all'asse baricentrico perpendicolare all'asse molecolare è uguale a μR^2, dove $\mu = M_1 M_2/(M_1 + M_2)$ è la massa ridotta della molecola.

Soluzione

Calcoliamo le coordinate del baricentro del sistema, supponendo che M_1 sia posta in $x = 0$ e M_2 in $x = R$:

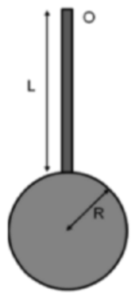
$$x_B = \frac{M_2 R}{M_1 + M_2}$$

La massa M_1 si trova quindi a distanza x_B dall'asse baricentrico, mentre la massa M_2 è a distanza $(R - x_B)$. Il momento di inerzia rispetto all'asse baricentrico è allora:

$$I = M_1 x_B^2 + M_2 (R - x_B)^2 = \frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2}(M_1 + M_2) R^2 = \mu R^2$$

PENDOLO FISICO

Un pendolo fisico è costituito da un'asta rigida, di lunghezza L e massa m, alla quale è saldato, ad una estremità, un disco massiccio di massa M e raggio R, come mostrato in figura. Si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni del pendolo quando esso è posto in oscillazione attorno all'estremo O dell'asta.



Soluzione

Dalla seconda equazione cardinale abbiamo che $M = I\ddot{\theta}$. Il monento è dato dall'azione della forza peso agente su asta e disco, i cui baricentri distano $L/2$ e $(L+R)$ dal perno O, rispettivamente:

$$M = mg\frac{L}{2}\sin\alpha + Mg(L+R)\sin\alpha$$

Dal teorema di Huygens-Steiner, il momento di inerzia totale del sistema sarà:

$$I = I_{asta} + I_{disco} = I_{a,CDM} + I_{CDM_a} + I_{d,CDM} + I_{CDM_d}$$

cioè

$$I = \frac{1}{12}mL^2 + M\frac{L^2}{4} + \frac{1}{2}MR^2 + M(L+R)^2$$

Nel limite delle piccole oscillazioni, l'equazione del moto diventa:

$$-\left(m\frac{L}{2} + M(L+R)\right)g\theta = I\ddot{\theta}$$

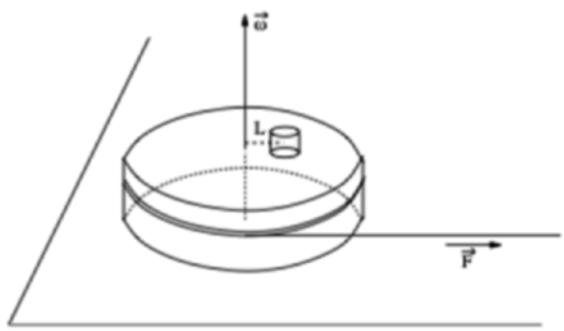
da cui

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\left(m\frac{L}{2} + M(L+R)\right)g}}$$

GIOSTRA

Una piccola giostra artigianale, di diametro $D = 50$ cm, viene fatta ruotare orizzontalmente tirando una fune avvolta intorno ad essa. Se alla fune viene esercitata una forza di modulo $F = 10$ N per un tempo $\Delta t = 1$ s, la giostra, partendo da ferma, compie in tale intervallo di tempo una rotazione completa.

- Quale momento delle forze esterne M_{ext} è applicato dalla fune sulla giostra?
- Qual è l'accelerazione angolare $\alpha = d\omega/dt$ della giostra?
- Qual è il momento di inerzia I della giostra rispetto al suo asse di rotazione?
- Successivamente, viene aggiunto sulla giostra un sedile cilindrico omogeneo di massa $m = 3$ kg e raggio $r = 5$ cm, fissato sul piano della giostra in posizione verticale, con l'asse a distanza $L = 10$ cm dall'asse di rotazione della giostra. Poi, tirando la fune, viene di nuovo applicata la forza costante F del caso precedente. Quanto vale adesso l'accelerazione angolare α' della giostra?



Soluzione

Il momento delle forze esterne è

$$M_{ext} = F\frac{D}{2} = 2.5N\,m$$

L'accelerazione angolare si ottiene considerando che, nel tempo di applicazione della forza, la giostra compie un moto circolare uniformemente accelerato, ruotando di un angolo 2π:

$$2\pi = \frac{1}{2}\alpha\Delta t^2 \rightarrow \alpha = 13\,[rad]/s^2$$

Il momento di inerzia si ricava dalla seconda equazione cardinale:

$$M_{ext} = I\alpha \rightarrow I = 0.2\, Kg\, m^2$$

L'aggiunta del sedile cilindrico modifica il momento di inerzia del sistema. Dal teorema di Huygens-Steiner, possiamo scrivere il nuovo momento di inerzia I' come:

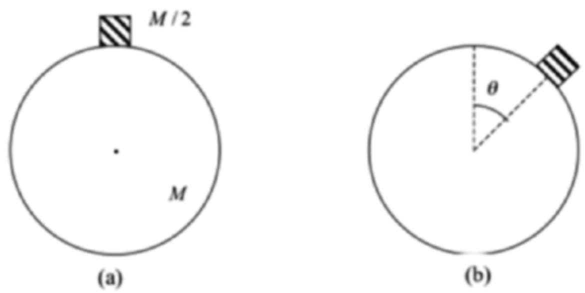
$$I' = I + I_{cil,CDM} + I_{CDM_{cil}} = I + \frac{1}{2}mr^2 + mL^2$$

e, sostituendo nella equazione cardinale, si ha $\alpha' = 11[\text{rad}]/s^2$.

ROTAZIONE SU CILINDRO

Si consideri un cilindro omogeneo di massa $M = 1.0$ kg e raggio $R = 10$ cm libero di ruotare attorno ad un asse orizzontale senza attriti. Su di esso viene posta una massa puntiforme $M/2$, come mostrato nella figura (a). All'istante iniziale il sistema è fermo in equilibrio instabile. Successivamente, il sistema cilindro+massa viene messo in rotazione con velocità iniziale trascurabile. Tra la massa ed il cilindro vi è attrito (coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.30$) e per questo motivo, per piccoli valori di θ ($\theta < \theta_{max}$), la massa si muove solidalmente al cilindro, senza strisciare. In queste condizioni, per $\theta = 10°$, si calcoli:

- la velocità angolare e l'accelerazione angolare del cilindro;
- l'accelerazione radiale e tangenziale della massa puntiforme;
- la forza di attrito e la reazione vincolare normale che agiscono sulla massa.
- Si calcoli inoltre il valore θ_{max} per il quale la massa puntiforme inizia a strisciare.



Soluzione

Se la massa non striscia sul cilindro, le forze agenti sono conservative:

$$E_i = E_f \rightarrow \frac{M}{2} gR = \frac{M}{2} gR\cos\theta + \frac{1}{2} I\omega^2$$

dove I è il momento di inerzia totale del sistema rispetto al centro del cilindro:

$$I = I_{cil} + I_{mp} = \frac{1}{2} MR^2 + \frac{M}{2} R^2 = MR^2$$

Sostituendo nella prima equazione, si ricava

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}(1 - \cos\theta)} \rightarrow \omega(10°) = 1.2[rad]/s$$

L'accelerazione angolare si ricava differenziando la velocità angolare:

$$\alpha = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{g\sin\theta}{2R} \to \alpha(10°) = 8.5[rad]/s^2$$

L'accelerazione angolare si poteva ricavare anche dalla seconda equazione cardinale:

$$\frac{M}{2}gR\sin\theta = I\alpha$$

Accelerazione tangenziale e radiale sono pari a

$$a_t = \alpha R = \frac{g\sin\theta}{2} \to a_t(10°) = 0.85m/s^2$$
$$a_r = \omega^2 R = g(1-\cos\theta) \to a_r(10°) = 0.15m/s^2$$

Reazione normale e forza di attrito si ricavano proiettando le forze agenti sulla massa puntiforme su un sistema di coordinate con asse x tangenziale alla superficie del cilindro e asse y normale ad essa:

$$-N + \frac{M}{2}g\cos\theta = \frac{M}{2}g(1-\cos\theta)$$
$$\frac{M}{2}g\sin\theta - F_a = \frac{Mg\sin\theta}{4}$$

da cui $N(10°) = 4.8$ N e $F_a(10°) = 0.43$ N.

La massa puntiforme non striscia se è verificata la condizione $F_a \leq \mu_s N$ (la massa è ferma rispetto al cilindro):

$$\frac{M}{4}g\sin\theta \leq \mu_s\frac{Mg}{2}(2\cos\theta - 1) \to \sin\theta_{max} = 2\mu_s(2\cos\theta_{max} - 1)$$

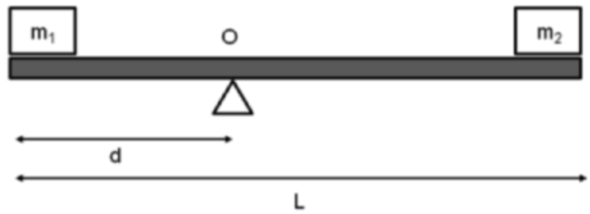
Elevando al quadrato (assumiamo come accettabili soluzioni con $\theta < 90°$), si ottiene la soluzione

$$\cos\theta_{max} = \frac{8\mu_s^2 \pm \sqrt{16\mu_s^2 - 4\mu_s^2 + 1}}{1 + 16\mu_s^2} \to \theta_{max} = 28°$$

avendo scartato la soluzione $\theta_{max} = 107° > 90°$.

BILANCIA

Un'asta omogenea, di massa $M = 10$ kg e lunghezza $L = 1$ m, è appoggiata su un fulcro liscio, distante $d = 0.2$ m da uno dei due estremi. L'asta è in equilibrio sotto l'azione di due pesi m_1 ed m_2 appoggiati agli estremi dell'asta stessa, come mostrato in figura. Sapendo che $m_2 = 5$ kg, calcolare il valore di m_1.



Soluzione

Se l'asta è in equilibrio, il momento risultante dalle forze peso è nullo:

$$m_1 g d - m_2 g(L-d) - Mg\left(\frac{L}{2} - d\right) = 0 \rightarrow m_1 = \frac{m_2(L-d) + M(\frac{L}{2} - d)}{d} = 35\,kg$$