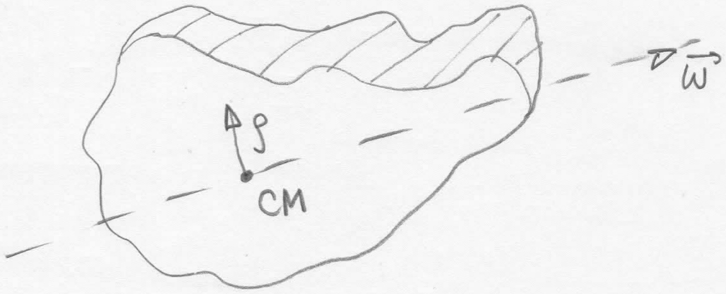
MOMENTO DI INERZIA ASSIALE

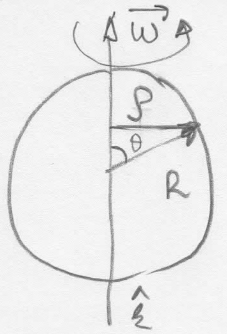
I_{CM} é il momento d'inerzia assiale rispetto ad un'asse diretto come $\vec{w}$ e passante per il CM, definito da:

$$I_{CM} = \iiint \rho^2 \, dm$$

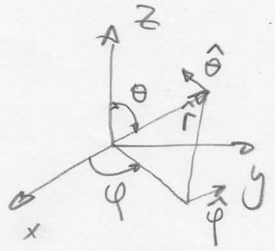
dove ρ definisce la distanza del generico elemento di massa dm dall'asse di rotazione.



SFERA PIENA OMOGENEA DI MASSA M E RAGGIO R



COORDINATE SFERICHE: (r, θ, φ)



$$\boxed{\text{Jacobiano: } r^2 \sin\theta}$$

$$dm = \left(\frac{M}{\text{Volume sfera}}\right) \text{Jacobiano sfera} \, dr\, d\theta\, d\varphi = \boxed{\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \, r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi}$$

Nel nostro caso $\boxed{\rho = r\sin\theta}$

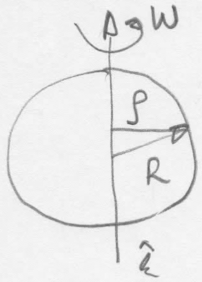
$$\boxed{I_{\hat{z}} = \iiint \rho^2 \, dm = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{3M}{4\pi R^3} r^2 \sin\theta\right) r^2 \sin^2\theta .}$$

Dobbiamo usare: $\displaystyle\int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta = \int_0^\pi (1-\cos^2\theta)\sin\theta \, d\theta = \frac{4}{3}.$

$$\boxed{I_{\hat{z}} = \frac{2\cancel{\pi} M}{\cancel{\pi} R^3} \int_0^R r^4 \, dr = \frac{2}{5} M R^2}$$

QUA la coordinata r varia. Va dal punto più interno ($r=0$), al più esterno $r=R$

SFERA CAVA DI RAGGIO R e Massa M



COORDINATE SFERICHE : (r, θ, φ)

$$\boxed{\text{Jacobiano: } R^2 \sin\theta}$$

in questo esempio $\boxed{r = R}$!!

la coordinata r va fissata alla superficie della sfera, perché la sfera è vuota !!!

$$dm = \frac{M}{\text{Volume sfera vuota}} \; \text{Jacobiano}_{\text{sfera vuota}} \; d\theta\, d\varphi = \boxed{\frac{M}{4\pi \cancel{R^2}} \cancel{R^2} \sin\theta \; d\theta\, d\varphi}$$

dr manca!! perché la sfera è vuota non si integra su r !!

Volume sfera vuota = Superficie sfera = $4\pi R^2$

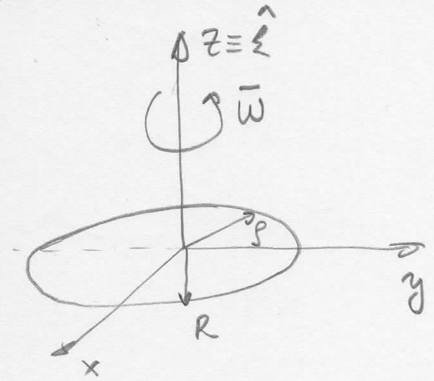
$$\boxed{\rho = R \sin\theta}$$

il Raggio fissato alla superficie

$$I_{\hat{z}} = \iiint \rho^2\, dm = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{M}{4\pi} \sin\theta \right) R^2 \sin^2\theta$$

$$\boxed{I_{CM} = \frac{2M}{3} R^2}$$

MOMENTO DI INERZIA DELL' ANELLO (Massa M)



Coordinate polari: r, φ

$$\boxed{\text{Jacobiano} = R}$$

R fissato all'anello!!

non varia!!

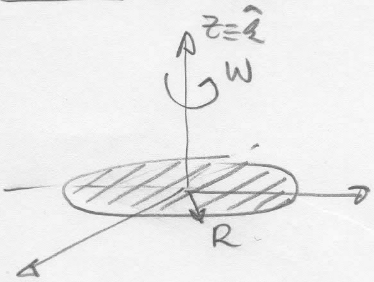
$$dm = \underbrace{\frac{M}{\text{Volume anello}}}\left(\underset{\text{polari}}{\text{Jacobiano}}\right) d\varphi = \boxed{\frac{M}{2\pi \cancel{R}} \cancel{R}\, d\varphi}$$

Volume anello → lunghezza circonferenza

$$\boxed{\rho = R}$$

$$\boxed{J_{\hat{z}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{M}{2\pi} R^2 = MR^2.}$$

MOMENTO DI INERZIA DEL DISCO (Massa M)



Coordinate polari: r, φ

$$\boxed{\text{Jacobiano} = r}$$

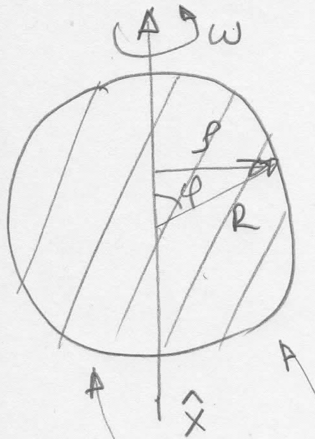
$$dm = \frac{M}{\text{Volume Disco}} (\text{Jacobiano})\, dr\, d\varphi = \boxed{\frac{M}{\pi R^2} r\, dr\, d\varphi}$$

Volume Disco → Superficie Disco $= \pi R^2$

$$\rho = r.$$

$$\boxed{J_{\hat{z}} = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{M}{\pi R^2} r\right) r^2 = \frac{MR^2}{2}.}$$

DISCO CON ALTRO ASSE DI ROTAZIONE



Coordinate polari : r, φ

$$\boxed{\text{Jacobiano} = r}$$

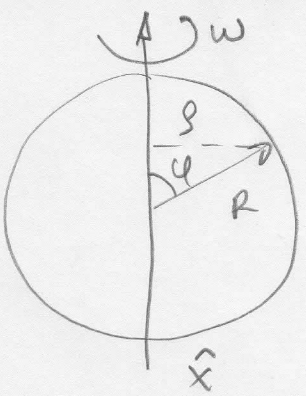
$$\boxed{\rho = r \sin\varphi}$$

$$dm = \underbrace{\frac{M}{\quad}}_{\text{Superficie Disco}} (\text{Jacobiano})\, dr\, d\varphi = \boxed{\frac{M}{\pi R^2}\, r\, dr\, d\varphi.}$$

$$I_{\hat{x}} = 2 \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{R} dr\, \frac{M}{\pi R^2}\, r \left(r^2 \sin^2\varphi\right) = \boxed{\frac{MR^2}{4}}$$

il due va perché integro per una semicirconferenza sola. quindi tutta la circonferenza è due volte la mia integrale.

ANELLO CON ALTRO ASSE DI ROTAZIONE



Coordinate polari : r, φ

$$\boxed{\text{Jacobiano} = R}$$ → è un anello!! R fissato all'anello!!

$$\boxed{\rho = R \sin\varphi}$$

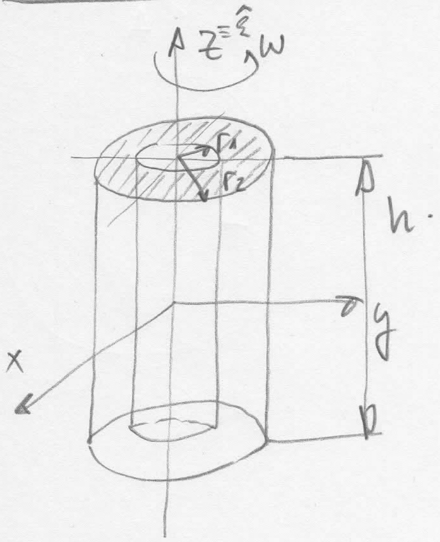
non va dr!!

$$dm = \underbrace{\frac{M}{\quad}}_{\text{lunghezza dell'anello}} (\text{Jacobiano})\, d\varphi = \frac{M}{2\pi \cancel{R}}\, \cancel{R}\, d\varphi$$

vedere esempio precedente

$$\boxed{I_{\hat{x}} = 2 \int_0^{\pi} d\varphi\, \frac{M}{2\pi}\, R^2 \sin^2\varphi = \frac{R^2 M}{2}}$$

CILINDRO CAVO DI MASSA M e RAGGI r_1 e r_2



Coordinate cilindriche: r, φ, z.

$$\boxed{\text{Jacobiano}: r}$$

$$dm = \frac{M}{\text{Volume cilindro cavo}} (\text{Jacobiano})\, dr\, d\varphi\, dz = \boxed{\frac{M}{\pi h (r_2^2 - r_1^2)}\, r\, dr\, d\varphi\, dz}$$

$$\boxed{\rho = r}$$

$$\boxed{\text{Volume cilindro cavo} = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi h (r_2^2 - r_1^2)}$$

$$I_{\hat{z}} = \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{r_1}^{r_2} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{M}{\pi h (r_2^2 - r_1^2)}\, r \right) r^2$$

$$(r_2^4 - r_1^4) = (r_2^2 - r_1^2)(r_2^2 + r_1^2)$$

$$I_{\hat{z}} = \frac{2\cancel{\pi} \cancel{h} M}{\cancel{\pi} \cancel{h} (r_2^2 - r_1^2)} \frac{1}{4} (r_2^4 - r_1^4) = \frac{M (r_2^4 - r_1^4)}{2 (r_2^2 - r_1^2)} = \boxed{\frac{M (r_2^2 + r_1^2)}{2}}$$

Per un cilindro pieno di massa M

facciamo $r_1 \to \infty$ $\Rightarrow$ $\boxed{I_{\hat{z}\,\text{cilindro pieno}} = \frac{M r_2^2}{2} = \frac{M R^2}{2}}$