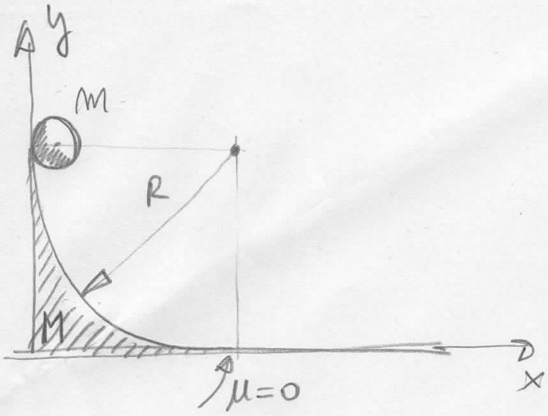
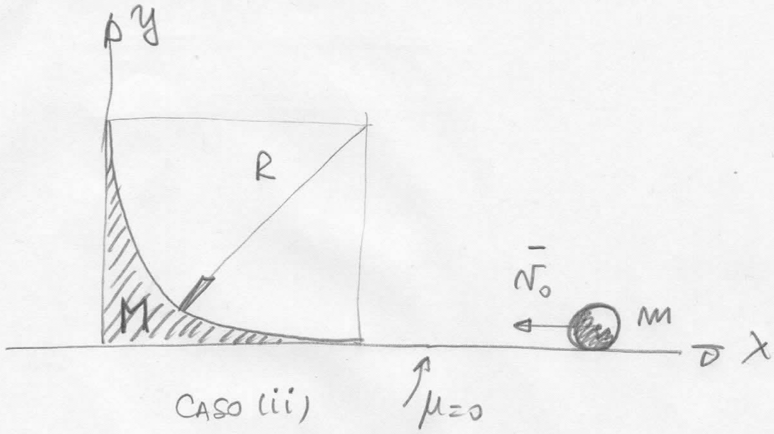
BLOCCO SU CUNEO



CASO (i)



CASO (iii)

CASO (i)

A t=0 la pallina di massa m è ferma.

Si conserva la quantità di moto del sistema: la coordinata x del centro di massa (x_{CM}) rimane costante.

$$x_{CM}^{0} = x_{CM}^{f} = \frac{m\, x_m + M\, x_M}{m+M} = cte \Rightarrow \boxed{v_{CM}^{x} = 0}$$

iniziale — finale

posizione pallina — posizione cuneo

In questo modo: $x_M = \frac{(m+M)}{M} x_{CM} - \frac{m}{M} x_m$

derivando ad ogni parte dell'eguale $\left(\frac{dx_{CM}}{dt} = 0\right)$ $\Rightarrow \boxed{v_M^x = -\frac{m}{M} v_m^x}$

Per ottenere il valore di v_m^x e v_M^x dobbiamo imporre la conservazione dell'energia meccanica:

$$\Delta E_M = 0$$

$$E_M^0 = mgR$$

$$E_M^f = \frac{1}{2} m v_m^{x^2} + \frac{1}{2} M v_M^{x^2} = \frac{1}{2} m v_m^{x^2} + \frac{1}{2} \frac{m^2}{M} v_m^{x^2}$$

$$E_M^f = \frac{1}{2} m v_m^{x^2} \left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

$$\Rightarrow \quad v_m^x = \sqrt{\frac{2gR}{1+\frac{m}{M}}} \quad ; \quad v_M^x = -\frac{m}{M}\sqrt{\frac{2gR}{1+\frac{m}{M}}}$$

CASO ii)

Anche qua si conserva la quantità di moto: $\boxed{\Delta Q = 0}$

$$\boxed{\vec{Q_0} = m\vec{v_0}} \; ; \; \boxed{\vec{v_0} = -v_0 \hat{x}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{v_{CM}(m+M)}_{Q_f} = \underbrace{-m v_0}_{Q_0}$$

Centro di massa

E della definizione di velocità del CM:

$$\boxed{v_{CM} = \frac{m v_m^x + M v_M^x}{m+M}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_M = -\frac{m}{M}\left(v_0 + v_m^x\right)}$$

Per calcolare la quota massima alla quale arriverà la pallina dobbiamo passare al sistema di riferimento S' che è sopra il cuneo:

Velocità del sistema S' (CUNEO)

$$v_m'^x = v_m^x - v_M = v_m^x - m\frac{v_0}{M} + \frac{m}{M} v_m^x$$

Velocità della pallina misurata da sotto (Laboratorio)

Velocità della pallina misurata dal sistema S' (CUNEO)

$$v_m'^x = v_m^x\left(1+\frac{m}{M}\right)+\frac{m}{M}v_0$$

La quota massima raggiunta dal punto materiale si trova facendo: $\boxed{v_m'^x = 0}$ quando si ferma la pallina sopra il CUNEO

$$v_m^x (M+m) + m v_0 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{v_m^x = -\frac{m v_0}{(m+M)} = v_{CM}^x = v_M}$$

E dalla conservazione dell'energia meccanica si ottiene:

$$mg\,R/2 + \frac{1}{2} m v_m^{x2} + \frac{1}{2} M v_M^2 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{Rg\frac{(m+M)}{M}}}$$

Nel limite di cuneo di massa infinita si ricava:

$$v_0 = \sqrt{gR\frac{(m+M)}{M}} \underset{M\to\infty}{=} \sqrt{gR}$$

Se fosse un piano inclinato con ALTEZZA $R/2 = h \Rightarrow$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{2gh}}$$

che è il risultato conosciuto.