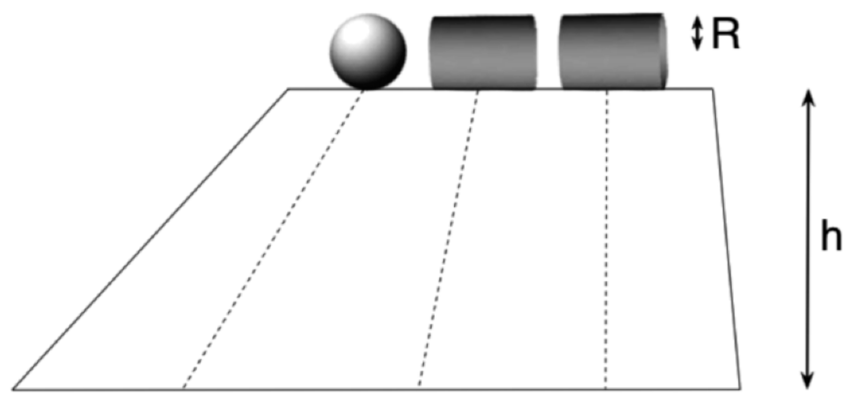
Esercizio – Cilindri e sfera che rotolano giú, chi arriva primo?



Una sfera omogenea, un cilindro omogeneo e un cilindro cavo (come un tubo aperto dai due lati) tutti e tre di massa M e raggio R rotolano senza slittare (puro rotolamento) dalla cima di un piano inclinato, in presenza di gravità. Se partono simultaneamente, allineati, con i tre centri alla stessa quota iniziale h, quale dei tre solidi arriverà per primo, quale per secondo e quale per terzo in fondo alla discesa (ovvero: con il centro a quota R)?

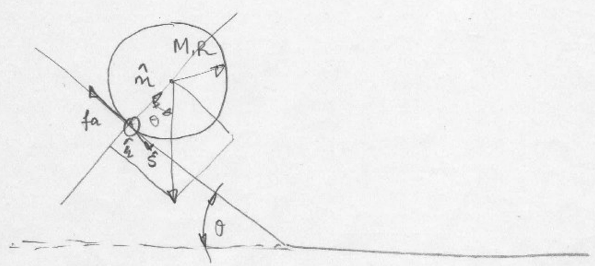
ROTOLAMENTO SU PIANO INCLINATO (SFERA, CILINDRO, ANELLO) ①

CALCOLARE:

i) l'ordine d'arrivo dei tre oggetti in fondo al piano inclinato,

ii) Forze di attrito statiche che il piano inclinato esercita sui tre oggetti durante la fase di puro rotolamento

iii) il valore minimo del coefficiente di attrito statico μ_s affinché sia possibile il moto di puro rotolamento,



Le equazioni cardinali del moto per un oggetto generico si scrivono nel modo seguente:

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{est} \qquad \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{T}_{est}$$

Forze esterne

momento delle Forze esterne

$M a_{CM} = Mg\sin\theta - f_a \qquad (\hat{s})$

$R_n - Mg\cos\theta = 0 \qquad (\hat{n})$

$I_{CM}\dot{\omega} = f_a R$

momento d'inerzia assiale rispetto ad un asse passante per il centro di massa e diretto come il versore $\hat{z}$

②

$$a_{CM} = \frac{Mg\sin\theta}{M + \frac{I_{CM}}{R^2}} \qquad f_a = I_{CM}\frac{a_{CM}}{R^2}$$

Ricordiamo ora i momenti d'inerzia assiali per i tre oggetti:

$$I_{CM}^{anello} = MR^2, \quad I_{CM}^{cilindro} = \frac{1}{2}MR^2, \quad I_{CM}^{sfera} = \frac{2}{5}MR^2$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione per a_{CM} si ottiene:

$$a_{CM}^{anello} = \frac{1}{2}g\sin\theta \; ; \quad a_{CM}^{cilindro} = \frac{2}{3}g\sin\theta \; ; \quad a_{CM}^{sfera} = \frac{5}{7}g\sin\theta$$

=) arriva prima: sfera, cilindro, anello.

Quanto più grande è il momento d'inerzia minore sarà l'accelerazione del CM. Si SPENDE DI PIÙ A MUOVERE IL CORPO!!!

---

ii) i valori delle forze di attrito statiche che il piano inclinato esercita. Sono necessari:

$$f_a^{anello} = \frac{1}{2}Mg\sin\theta, \quad f_a^{cilindro} = \frac{1}{2}Mg\sin\theta, \quad f_a^{sfera} = \frac{2}{7}Mg\sin\theta.$$

iii) il valore minimo del coefficiente di attrito statico μ_s affinché sia possibile il moto di puro rotolamento.

$$f_a \leq \mu_s Mg\cos\theta$$

$$\mu_s^{anello} \geq \frac{1}{2}\tan\theta, \quad \mu_s^{cilindro} \geq \frac{1}{3}\tan\theta, \quad \mu_s^{sfera} \geq \frac{2}{7}\tan\theta$$

Così possiamo vedere che $\mu_s = 0 \Rightarrow \theta = 0$ (piano orizzontale)