Un uomo di massa m sta salendo su una scala a pioli di lunghezza L e una massa M appoggiata ad un pavimento e ad una parete verticale. Supponendo che il pavimento sia scabro e caratterizzato da un coefficiente di attrito statico μ_s e il muro sia liscio, e assimilando l'uomo ad un punto materiale si determini:

i. In assenza dell'uomo e in condizione di equilibrio le espressioni delle reazioni vincolari del pavimento e del muro;

ii. in assenza dell'uomo l'angolo minimo di equilibrio per la scala;

iii. La quota massima raggiungibile dall'uomo in funzione dell'angolo θ che la scala forma con il pavimento.

---

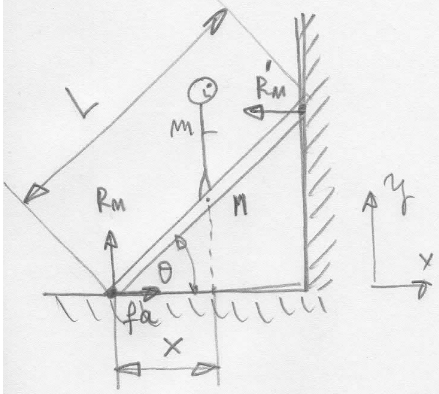
i. FORZE SULLA SOLA SCALA SONO: (SENZA UOMO)

$\vec{P}_M$: Forza peso agente sulla scala

$\vec{R}_M'$: reazione vincolare del muro, normale al muro stesso

$\vec{R}_M$: reazione del pavimento sul blocco

$\vec{f_a}$: forza d'attrito (statico) tra la scala e pavimento



$$\vec{P}_M + \vec{R}_M' + \vec{R}_M + \vec{f_a} = 0$$

$$\vec{\tau}^{\,est} = \vec{\tau}_{P_M} + \vec{\tau}_{\vec{R}_M'} = 0$$

momento

$$\begin{cases} \hat{x}: \ f_a - R_M' = 0 \\ \hat{y}: \ -Mg + R_M = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{Mg\frac{L}{2}\cos\theta - R_M' L \cos\theta = 0}$$

Risolvendo si ottiene:

$$\boxed{R_M = Mg} \qquad \boxed{f_a = R_M' = \frac{Mg}{2}\cot\theta}$$

ii. Per determinare l'angolo minimo di equilibrio dobbiamo imporre che la forza d'attrito statico non ecceda il suo valore massimo:

$$f_a = \frac{Mg}{2}\cot\theta \leq \mu_s Mg \Rightarrow \boxed{\theta \leq \arctan(2\mu_s)}$$

COME CAMBIA LA COSA CON L'UOMO SULLA SCALA

iii) Una volta salito l'uomo sulla scala, possiamo immaginare che esso rappresenti una ulteriore massa m posizionata sulla scala ad una distanza lungo la scala pari a $\frac{x}{\cos\theta}$, dove x è la proiezione della posizione dell'uomo sull'asse orizzontale.

Quindi, l'equazioni cardinali possono riscriversi nella forma:

$$\hat{y}: \quad -\underbrace{Mg}_{\text{scala}} - \underbrace{mg}_{\text{uomo}} + R_M = 0$$

$$\hat{x}: \quad f_a - R_M' = 0$$

$$\text{momento:} \quad Mg\frac{L}{2}\cos\theta + mgx - R_M' L\cos\theta = 0$$

Risolvendo si ottiene:

$$R_M = (M+m)g$$

$$f_a = R_M' = \frac{Mg}{2}\cot\theta + \frac{mgx}{L\sin\theta}$$

Per determinare la distanza massima percorribile dall'uomo in funzione dell'angolo θ dobbiamo di nuovo imporre che la forza di attrito statica non ecceda il suo valore massimo.

$$f_a = \frac{Mg}{2}\cot\theta + \frac{mgx}{L\sin\theta} \leq \mu_s (M+m) g$$

che per la distanza massima è ($x_{max}/\cos\theta$):

$$\frac{x_{max}}{\cos\theta} = L \tan\theta \left[\mu_s \left(1 + \frac{M}{m}\right) - \frac{M}{2m}\cot\theta \right]$$

Possiamo ora chiederci sotto quali condizioni (per μ_s o per θ) l'uomo riesca a salire in cima alla scala, ossia percorrere lungo di essa un tratto L. A tal fine dobbiamo imporre la condizione $\frac{x_{max}}{\cos\theta} = L$.

Allora:

$$\boxed{\cot\theta = \mu_s \frac{\left(1 + \frac{M}{m}\right)}{\left(1 + \frac{M}{2m}\right)}}$$

Che fornisce un valore minimo per l'angolo θ_{min} nel caso in cui fosse fissato il valore di μ_s, ovvero il valore minimo per $\mu_{s,min}$ se fosse invece fissato l'angolo θ.