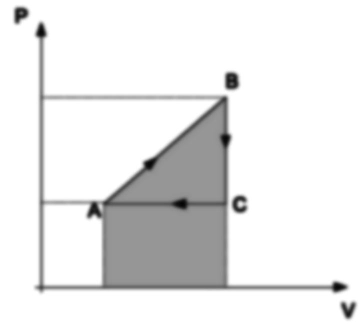
IX ESERCITAZIONE

I. RENDIMENTO

Un gas perfetto monoatomico compie il ciclo schematicamente mostrato in figura, attraverso trasformazioni reversibili. I valori di pressione e volume sono i seguenti: $P_A = 2 \cdot 10^5$Pa $V_A = 2\ell$, $P_B = 5P_A$, $V_C = 3V_A$. Calcolare il rendimento η del ciclo.



Soluzione

Il rendimento è $\eta = L/Q_{ass}$. Il lavoro compiuto nel ciclo è pari all'area del triangolo $\widehat{ABC}$:

$$L = \frac{1}{2}(V_C - V_A)(p_B - p_C) = \frac{1}{2} \cdot 2V_A \cdot 4p_A = 4\,p_A V_A = 1600\,\mathrm{J}$$

Il calore viene assorbito nel tratto AB e si ottiene dal primo principio:

$$Q_{\text{assorbito}} = Q_{AB} = L_{AB} + \Delta U_{AB} = \text{ area trapezio grigio} + nc_V(T_B - T_C)$$

dove area trapezio grigio = area triangolo ABC + area rettangolo sottostante =

$$= L + p_A \cdot (V_C - V_A) = 2400\,\mathrm{J}$$

$$\Delta U_{AB} = nc_V\left(\frac{P_B V_B}{nR} - \frac{P_A V_A}{nR}\right) = 21 P_A V_A = 8400\,J$$

$$Q_{\text{assorbito}} = 10800\,\mathrm{J} \quad ; \quad \eta = 15\%$$

II. MACCHINA DI CARNOT

Una macchina di Carnot assorbe una certa quantità di calore Q_1 da una sorgente a temperatura T_1 e cede calore Q_2 ad una seconda sorgente a temperatura $T_2 = 40\% T_1$. Determinare il rendimento η della macchina, il lavoro compiuto durante il ciclo e il calore ceduto.

Soluzione

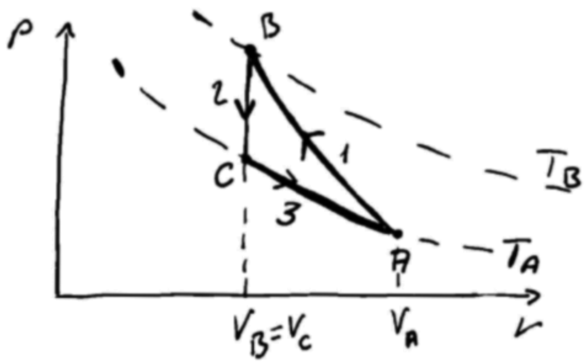
Il rendimento di una macchina di Carnot è $\eta = 1 - \dfrac{T_2}{T_1} = 1 - 0.4 = 60\%$.

Il lavoro compiuto nel ciclo è $L = \eta\, Q_1$; il calore assorbito è $|Q_2| = |Q_1|(1 - \eta)$.

III. LAVORO

Un gas perfetto biatomico è contenuto in un cilindro chiuso da un pistone. Inizialmente, si trova nello stato caratterizzato da $T_A = 300$K, $V_A = 4\ell$, $P_A = 1$atm. Il gas viene poi compresso adiabaticamente fino a $V_B = 1\ell$, poi raffreddato a $V = cost$ finché la temperatura non raggiunge il valore iniziale T_A. Il gas viene infine lasciato espandere isotermicamente fino al volume iniziale V_A. Disegnare il ciclo nel piano PV e calcolare il lavoro totale.

Soluzione



$$L = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA} = -\Delta U_{AB} + L_{CA} = nc_V(T_A - T_B) + nRT_A \ln \frac{V_A}{V_C}$$

Dobbiamo ricavare $T_B = (P_B V_B)/(nR)$:

$$nR = \frac{P_A V_A}{T_A} = 1.35\, JK^{-1}$$

$$P_A V_A^{\gamma} = P_B V_B^{\gamma} \rightarrow P_B = 4^{\frac{7}{5}} P_A$$

$$T_B = 4^{\frac{7}{5}} \frac{P_A V_B}{nR} = 522.96\, K$$

da cui

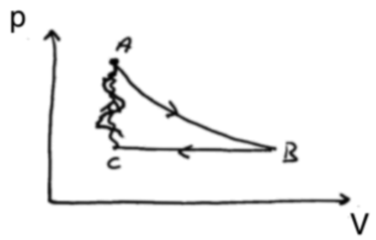
$$L = \frac{5}{2} nR(T_A - T_B) + nRT_A \ln 4 = -189.79\, J$$

IV. ISOCORA IRREVERSIBILE

Una mole di gas perfetto monoatomico compie un ciclo tra gli stati ABCA, secondo le seguenti trasformazioni: • A→B isoterma reversibile; • B→C isobara reversibile; • C→A isocora irreversibile, durante la quale il sistema viene riportato nello stato A mediante il solo scambio di calore Q_{CA} (L_{CA}=0J).

Disegnare il ciclo nel piano PV; calcolare il calore scambiato in ciascuna trasformazione e il calore totale (in modulo e segno); calcolare il lavoro compiuto in ciascuna trasformazione e il lavoro totale (in modulo e segno). Dati: $V_A = 5\ell$, $V_B = 10\ell$, $P_A = 1$atm, $P_B = 0.5$atm.

Soluzione



$$Q_{AB} = L_{AB} = nRT_A \ln\frac{V_B}{V_A} = nRT_A \ln 2$$

$$Q_{BC} = nc_P(T_C - T_B) = nc_P(T_C - T_A)$$

$$Q_{CA} = nc_V(T_A - T_C)$$

Dobbiamo ricavare T_A e T_C. La prima si ottiene dall'equazione dei gas perfetti applicata allo stato A, la seconda imponendo che $P/(nR) = cost$ nel tratto BC:

$$T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = 60.85\,K$$
$$\frac{T_B}{V_B} = \frac{T_C}{V_C} \to T_C = \frac{T_A}{2}$$

da cui $Q_{AB} = 351.08$J, $Q_{BC} = -633.12$J, $Q_{CA} = 379.87$J, $Q_{tot} = 97.83$J.

$$L_{AB} = Q_{AB} = 351.08\,J$$

$$L_{BC} = P_B(V_C - V_B) = -P_B V_A = -253.25\,J$$

$$L_{CA} = 0\,J$$

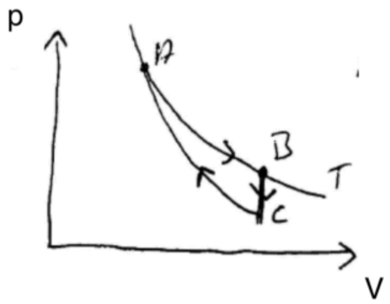
$$L_{tot} = 97.83\,J$$

Nota bene: $Q_{tot} = L_{tot}$, poiché in un ciclo $\Delta U_{tot} = 0$J.

V. CICLO REVERSIBILE

Una mole di gas perfetto monoatomico compie il seguente ciclo: • A→B isoterma reversibile a T_A = 400K che porta a V_B = $2V_A$; • B→C isocora reversibile; • C→A compressione adiabatica reversibile. Disegnare il ciclo nel piano PV; calcolare il calore totale scambiato e il rendimento η del ciclo.

Soluzione



$$Q_{tot} = Q_{AB} + Q_{BC} = L_{AB} + Q_{BC} =$$
$$= nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} + nc_V(T_C - T_B) = nRT_A \ln 2 + nc_V(T_C - T_A)$$

Dobbiamo ricavare T_C: utilizziamo la relazione tra T e V in un'adiabatica (tratto CA):

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1} \rightarrow T_C = \frac{1}{2}^{2/3} T_A = 251.98\,K$$

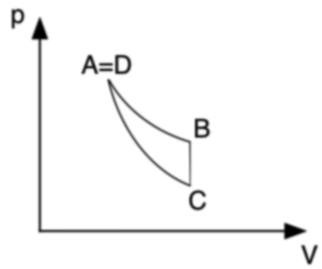
tenuto conto che $V_B = 2V_A$. Il calore totale scambiato è $Q_{tot} = 459.00$J. Il rendimento è

$$\eta = \frac{L}{Q_{ass}} = \frac{Q_{tot}}{Q_{AB}} = 20\%$$

VI. TRASFORMAZIONI REVERSIBILI

Una mole di gas perfetto monoatomico è nello stato A ($T_A = 300$K, $V_A = 1\ell$). Il gas compie le seguenti trasformazioni reversibili: • A→B isoterma fino a $V_B = 3V_A$; • B→C isocora fino a $T_C = 144.2$K; • C→D compressione adiabatica fino a $V_D = V_A$. Disegnare il ciclo nel piano PV. Determinare P(atm), V(ℓ), T(K) in ognuno dei 4 stati. Determinare il calore scambiato in ogni trasformazione, in modulo e segno. Calcolare il lavoro compiuto in ogni trasformazione, in modulo e segno. Calcolare la variazione di energia interna in ogni trasformazione, in modulo e segno. Se $D \equiv A$, calcolare il rendimento η del ciclo.

Soluzione



Stato A:

$$T_A = 300\,K;\ V_A = 1\ell;\ P_A = \frac{nRT_A}{V_A} = 2.49 \cdot 10^6\,Pa$$

Stato B:

$$T_B = T_A = 300\,K;\ V_B = 3V_A = 3\ell;\ P_B = \frac{nRT_B}{V_B} = \frac{P_A}{3} = 8.31 \cdot 10^5\,Pa$$

Stato C:

$$T_B = 144.2\,K;\ V_C = 3V_A = 3\ell;\ P_C = \frac{nRT_C}{V_C} = 3.99 \cdot 10^5\,Pa$$

Stato D:

$$V_D = V_A = 1\ell$$
$$T_D V_A^{\gamma-1} = T_C (3V_A)^{\gamma-1} \rightarrow T_D = 3^{2/3} T_C = 300\,K = T_A$$
$$P_D = P_A$$

ovvero $D \equiv A$.

Calori scambiati:

$$Q_{AB} = L_{AB} = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} = 2738.84\,J$$
$$Q_{BC} = nc_V(T_C - T_B) = nc_V(T_C - T_A) = -1942.05\,J$$
$$Q_{CA} = 0\,J$$

Lavori compiuti:

$$L_{AB} = Q_{AB} = 2738.84\,J$$
$$L_{BC} = 0\,J$$
$$L_{CA} = -\Delta U_{CA} = nc_V(T_C - T_A) = Q_{BC} = -1942.05\,J$$

Variazioni di energia interna:

$$\Delta U_{AB} = 0\,J$$
$$\Delta U_{BC} = Q_{BC} = -1942.05\,J$$
$$\Delta U_{CA} = -Q_{BC} = -1942.05\,J$$

Nota bene: $\Delta U_{tot} = 0$J (ciclo).

Il rendimento del ciclo è:

$$\eta = \frac{L}{Q_{ass}} = \frac{Q_{tot}}{Q_{AB}} = 1 - \frac{|Q_{BC}|}{|Q_{AB}|} = 29\%$$