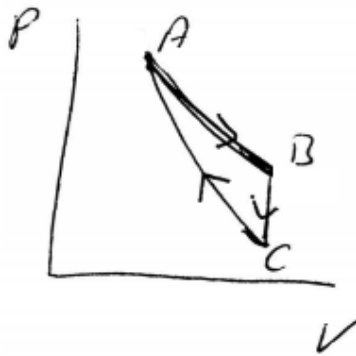


## X ESERCITAZIONE

### I. ENTROPIA

Una mole di gas perfetto monoatomico compie un ciclo formato dall'isoterma reversibile  $AB$  ( $V_B = 5V_A$ ), da un'isocora reversibile  $BC$  e da un'adiabatica reversibile  $CA$ . Disegnare il ciclo nel piano  $pV$  e determinare la variazione di entropia lungo l'isocora  $BC$ .

#### Soluzione



L'entropia è una funzione di stato, quindi lungo un ciclo  $\Delta S = 0$ ; nel tratto  $CA$  l'entropia è costante ( $\Delta S_{CA} = 0$ ) perché si tratta di una trasformazione adiabatica; quindi

$$\Delta S = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA} = 0 \implies$$

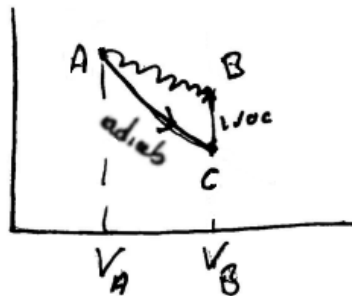
$$\implies \Delta S_{BC} = -\Delta S_{AB} = -\int_A^B \frac{\delta Q}{T} = \int_B^A \frac{dL}{T} = nR \int_{V_B}^{V_A} \frac{dV}{V} = -R \ln 5$$

## II. ENTROPIA E TRASFORMAZIONE IRREVERSIBILE

Tre moli di un gas perfetto monoatomico si trovano in uno stato di equilibrio  $A$  caratterizzato da pressione  $p_A$  e temperatura  $T_A$ . In seguito ad una trasformazione irreversibile il gas raggiunge un nuovo stato di equilibrio  $B$  nel quale la temperatura è una volta e mezza quella precedente ( $T_B = 3T_A/2$ ) e il volume è il doppio di quello precedente ( $V_B = 2V_A$ ). Calcolare la variazione di entropia del gas fra lo stato  $A$  e lo stato  $B$ .

### Soluzione

L'entropia è una funzione di stato e la sua variazione  $\Delta S_{AB}$  si può calcolare lungo qualsiasi trasformazione reversibile (o sequenza di trasformazioni reversibili) in grado di connettere lo stato  $A$  allo stato  $B$ . Ad esempio, partendo da  $A$ , possiamo raggiungere  $B$  mediante (vedi figura) una trasformazione  $AC$  reversibile adiabatica (a entropia costante, quindi  $\Delta S_{AC} = 0$ ) seguita da una trasformazione  $CB$  reversibile isocora (a volume costante), per la quale  $\Delta S_{CB} = n c_V \ln(T_B/T_C)$ . Ottengo  $\Delta S_{AB} = \Delta S_{AC} + \Delta S_{CB} = n c_V \ln(T_B/T_C)$ . Come trovo  $T_C$ ? Lo ottengo dalla relazione tra  $T$  e  $V$  in un'adiabatica:  $T_A V_A^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \Rightarrow T_C = 2^{-2/3} T_A$ .



Trovo quindi una variazione di entropia:

$$\Delta S_{AB} = \frac{9}{2} R \ln \left( \frac{3}{2^{1/3}} \right) = 32.44 \text{ J/K} .$$

Lo stesso risultato otterrei, ovviamente, scegliendo qualsiasi altro cammino reversibile che connetta  $A$  a  $B$  (ad esempio isoterma reversibile seguita da isocora reversibile, eccetera).

### III. ENTROPIA E TRASFORMAZIONE IRREVERSIBILE - 2

Una mole di  $H_2$  (gas perfetto) in equilibrio termodinamico a temperatura  $T_1 = 100$  K occupa un volume  $V_1 = 10$   $\ell$ . Il sistema subisce una trasformazione che lo porta ad uno stato finale caratterizzato da temperatura  $T_2 = 600$  K e volume  $V_2 = 100$   $\ell$ . Calcolare la variazione di entropia dell'ambiente **(a)** se la trasformazione è reversibile; **(b)** se la trasformazione è irreversibile e avviene mentre il gas è a contatto con una sorgente esterna a temperatura costante  $T_o = 750$  K e la pressione esterna è costante e pari a  $P_o = 0.49$  atm.

#### Soluzione

La variazione di entropia del gas  $\Delta S^g$  dipende solo dagli stati iniziale e finale (l'entropia è una funzione di stato). Con i dati del problema essa vale

$$\Delta S^g = nR \int_1^2 \frac{dV}{V} + nc_V \int_1^2 \frac{dT}{T} = R \ln (6^{5/2} \cdot 10) = 56.36 \text{ J/K}$$

#### **(a) caso reversibile**

Qui nella disuguaglianza di Clausius vale il segno di uguaglianza, la variazione di entropia dell'universo (ambiente + gas) è nulla  $\Delta S^U = 0$  e pertanto le variazioni dell'entropia di ambiente (a) e gas (g) sono opposte, il che fornisce la variazione di entropia dell'ambiente:

$$\Delta S^U = \Delta S^a + \Delta S^g = 0 \implies \Delta S^a = -\Delta S^g = -56.4 \text{ J/K}$$

#### **(b) caso irreversibile**

Qui nella disuguaglianza di Clausius vale il segno di strettamente maggiore  $\Delta S^U > 0$ , ovvero  $\Delta S^a > -\Delta S^g$ . Il testo specifica che in questa trasformazione irreversibile l'ambiente funge da serbatoio a  $T, p$  costanti: infatti dice che il gas assorbe calore dall'ambiente a temperatura esterna costante  $T_o > T_2 > T_1$ , e compie a pressione esterna costante  $p_o$  il proprio lavoro di espansione, che è quindi  $L^g = p_o(V_2 - V_1)$ . Per il primo principio il gas ha assorbito dall'ambiente il calore  $Q^g = \Delta U^g + L^g = nc_V(T_2 - T_1) + p_o(V_2 - V_1) = 3550 \text{ cal} = 14860 \text{ J}$ , che l'ambiente ha quindi ceduto ( $Q^a = -Q^g$ ) a temperatura costante  $T_o$ , con variazione di entropia  $\Delta S^a = Q^a/T_o = -19.8 \text{ J/K}$ , e possiamo verificare che questo risultato rispetta la disuguaglianza di Clausius detta all'inizio:  $\Delta S^a = -19.8 > -\Delta S^g = -56.4 \text{ J/K}$ .

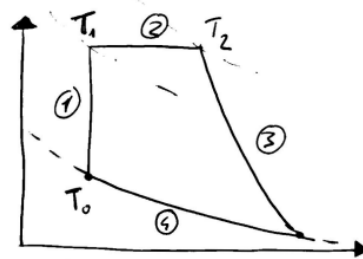
#### IV. GAS REALE

Un gas reale di massa  $m = 15$  g,  $c_P = 0.210$  cal/g e  $\gamma = 1.31$  esegue il seguente ciclo di trasformazioni reversibili a partire da  $T_0 = 20^\circ$ : (1) isocora  $0 \rightarrow 1$  fino a  $T_1 = 300^\circ$ ; (2) isobara  $1 \rightarrow 2$  fino a  $T_2 = 500^\circ$ ; (3) adiabatica  $2 \rightarrow 3$ ; (4) isoterma  $3 \rightarrow 0$ .

Disegnare il ciclo nel piano  $pV$ . Calcolare il rendimento  $\eta$  e il lavoro di questo ciclo.

#### Soluzione

Nel piano  $pV$  il ciclo è:



Il rendimento è  $\eta = \frac{Q_{01} + Q_{12} - |Q_{30}|}{Q_{01} + Q_{12}}$  perché  $\eta = \frac{L_{fatto}}{Q_{assorbito}} = \frac{Q_{assorbito} - |Q_{ceduto}|}{Q_{assorbito}}$ ; il calore

viene assorbito nei tratti  $0 \rightarrow 1$  e  $1 \rightarrow 2$  e ceduto nel tratto  $3 \rightarrow 0$  (nel tratto  $2 \rightarrow 3$  non viene né ceduto né assorbito calore perché è una trasformazione adiabatica).

$$Q_{01} = \Delta U_{01} = m c_V (T_1 - T_0) = m \frac{c_P}{\gamma} (T_1 - T_0) = 673.28 \text{ cal}$$

$$Q_{12} = m c_P (T_2 - T_1) = 630 \text{ cal}$$

Poiché la trasformazione  $3 \rightarrow 0$  è reversibile, per valutare  $Q_{30}$  possiamo servirci dell'integrale di Clausius e del fatto che  $\Delta S = 0$  su un ciclo:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_0^1 \frac{\delta Q}{T} + \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + \int_2^3 \frac{\delta Q}{T} + \int_3^0 \frac{\delta Q}{T} = \\ &= m \frac{c_P}{\gamma} \ln \left( \frac{T_1}{T_0} \right) + m c_P \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) + 0 + \frac{Q_{30}}{T_0} = 0 \implies \end{aligned}$$

$$\implies Q_{30} = -T_0 m c_P \ln \left( \frac{T_1^{\gamma-1} T_2}{T_0^\gamma} \right) = -748.87 \text{ cal} \quad (\text{temperature ovviamente tutte in K}).$$

Il rendimento è  $\eta = 0.42$ . Il lavoro, per il 1° principio, è pari al calore netto assorbito:

$$L = Q_{01} + Q_{12} + Q_{30} = 554.41 \text{ cal} \quad [= Q_{01} + Q_{12} - |Q_{30}| = Q_{assorbito} - |Q_{ceduto}|]$$