Problema 1 – Proiettile e bacchetta (22 punti = 2 + 3 + 5 + 1 + 4 + 7 punti)

1.1 $L_i = m\,l\,v\,|\sin\theta|$

1.2 $L_f = L_i$; il momento angolare si conserva nell'impatto perché l'unica forza esterna al sistema, la reazione vincolare impulsiva del perno, ha braccio nullo (quindi momento nullo) rispetto alla posizione del perno stesso

1.3 $I = m\,\ell^2\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+1\right) = \frac{4}{3}m\,\ell^2$;

$$\omega_f = \frac{L_f}{I} = \frac{L_i}{I} = \frac{3v\,|\sin\theta|}{4\ell}\,.$$

1.4 $P_i = m\,v$

1.5 Poiché $M_{\rm tot} = 2m$ e $r_{\rm c} = \frac{3}{4}\ell$, $P_f = M_{\rm tot}\,v_{\rm c\,finale} = M_{\rm tot}\,\omega_f\,r_{\rm c} = \frac{9}{8}\,m\,v\,|\sin\theta|$; la q. di moto finale P_f è diversa da quella iniziale P_i per la presenza di una forza esterna al sistema bacchetta+proiettile: la reazione vincolare, impulsiva, del perno

1.6 Poiché $T = I\dot\omega$, definito il tempo caratteristico $\tau = I/k$, l'equazione differenziale per ω diventa $\dot\omega = \omega/\tau$ che, con la scelta di $t = 0$ come istante dell'impatto, ha soluzione $\omega(t) = \omega_f\exp(-t/\tau)$; dopodiché,integrando l'equazione differenziale $\dot\theta = \omega$, si ottiene

$$\theta(t) = \omega_f\tau[1-\exp(-t/\tau)] + \theta_{\rm o}\,,$$

dove abbiamo ribattezzato $\theta_{\rm o}$ l'angolo iniziale fra proiettile e bacchetta, per non confonderlo con la funzione $\theta(t)$; nel limite $t\to\infty$, quando la velocità angolare si annulla, l'angolo percorso è

$$\theta_\infty = \lim_{t\to\infty}\theta(t) = \omega_f\tau + \theta_{\rm o}$$

e il numero di giri compiuti dalla bacchetta con dentro il proiettile è

$$N_{\rm giri} = \theta_\infty/2\pi\,.$$

Problema 2 – Gas perfetto monoatomico (18 punti = 2 + 2 + 4 + 3 + 4 + 3 punti)

Trattandosi di $n = 1$ mole di gas perfetto, $pV = RT$.

2.1. $p_A = RT_A/V_A$

2.2. $T_B = T_A$ (espansione nel vuoto), quindi $p_B = p_A V_A/V_B$

2.3 $\Delta U_{AB} = U_B - U_A = \frac{3}{2}R\,(T_B - T_A) = 0$; lungo una isoterma reversibile troviamo

$\Delta S_{AB} = S_B - S_A = R\ln(V_B/V_A)$

2.4 $V_C = V_B(\,p_B/p_{\rm o})^{3/5}$, perché in una trasformazione adiabatica reversibile di un gas perfetto monoatomico $(p_B V_B)^{5/3} = (p_{\rm o} V_C)^{5/3}$;

$$T_C = \frac{p_{\rm o} V_C}{R} = T_A\left(\frac{p_{\rm o}}{p_A}\frac{V_B}{V_A}\right)^{2/5}\,.$$

2.5 $\Delta U_{BC} = U_C – U_B = \frac{3}{2}R\,(T_C – T_B) = \frac{3}{2}R\,(T_C – T_A) =$

$$= \frac{3}{2}RT_A\left[\left(\frac{p_{\rm o}}{p_B}\right)^{2/5} - 1\right]\;;$$

$$\Delta S_{BC} = S_C - S_B = 0$$

perché in questa trasformazione reversibile (il pistone sale molto lentamente) non c'è scambio di calore (adiabatica)

2.6 Sí, è possibile prevedere quei segni: n un processo spontaneo di un sistema isolato l'entropia cresce ($\Delta S_{AB} > 0$); senza scambio di calore e con lavoro positivo l'energia interna diminuisce ($\Delta U_{BC} = Q_{BC} - L_{BC} < 0$).