SCRITTO - 28 Gennaio 2014

I. ESERCIZIO 1

1.1 L'energia persa E_d è dovuta al lavoro della forza di attrito L_a

$$E_d = -L_a = \mu_d \, mg \, BC + \mu_d \, mg \cos\alpha \, DE = \mu_d \, mgL(1 + \cos\alpha) = 7.322\,\mathrm{J}$$

1.2 La quota massima si ottiene dal bilancio energetico: l'energia iniziale (tutta cinetica) viene in parte convertita in energia potenziale e in parte dissipata dalla forza di attrito:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh + E_d \implies h = \frac{v_0^2}{2g} - \mu_d \, L(1 + \cos\alpha) = 4.350\,\mathrm{m}$$

1.3 Anche la velocità in A si ottiene dal bilancio energetico: l'energia potenziale iniziale viene in parte convertita in energia cinetica finale e in parte dissipata dalla forza di attrito:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 + E_d \implies v_1 = \sqrt{v_0^2 - 4\mu_d \, gL(1 + \cos\alpha)} = 8.409\,\mathrm{m/s}$$

1.4 Quando il blocchetto arriva al punto G, la componente tangenziale dell'accelerazione è $a_t = g$; la componente normale è v_G^2/R, dove v_G^2 si ottiene imponendo la conservazione dell'energia dal punto A al punto G (da A in poi la guida è liscia): l'energia meccanica, che nel punto A è tutta cinetica, nel punto G è in parte potenziale e in parte cinetica:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgR + \frac{1}{2}mv_G^2 \implies a_n = \frac{v_G^2}{R} = \frac{v_0^2}{R} - 4\mu_d \, g\frac{L}{R}(1 + \cos\alpha) - 2g = 3.950\,\mathrm{m/s^2}$$

1.5 Nel punto G la forza peso è solo tangenziale. La reazione vincolare $\vec{N}$, sempre normale alla guida, nel tratto semicircolare è diretta verso l'interno e fornisce la forza centripeta necessaria a mantenere il blocchetto in rotazione lungo la guida; nel punto G il modulo è

$$N = m\frac{v_G^2}{R} = m\left[\frac{v_0^2}{R} - 4\mu_d \, g\frac{L}{R}(1 + \cos\alpha) - 2g\right] = 3.950\,\mathrm{N}$$

1.6 Il blocchetto si stacca dalla guida appena cessa di premere su di essa, cioè quando la reazione vincolare si annulla ($N = 0$). Dall'equazione del moto e dalla conservazione dell'energia tra il punto A e il punto generico corrispondente all'angolo θ:

$$\begin{aligned} N + mg\sin\theta &= m\frac{v^2}{R} \\ \frac{1}{2}mv_1^2 &= mgR(1 + \sin\theta) + \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned}$$

da cui

$$N = 0 \implies \frac{v_1^2}{R} - g(2 + 3\sin\theta) = 0 \implies \theta = \arcsin\left(\frac{v_1^2}{3gR} - \frac{2}{3}\right) = 7.714^\circ$$

II. ESERCIZIO 2

2.1 Solo il proiettile contribuisce al momento della quantità di moto iniziale rispetto all'asse del cilindro (all'asta verticale) perché inizialmente tutto il resto è fermo; il modulo è quindi

$$L_i = mv\frac{\ell}{2} = 0.3225\,\mathrm{kg\,m^2/s}$$

Il momento della quantità di moto totale rispetto all'asse del cilindro (ovvero all'asta) si conserva ($L_f = L_i$); il motivo è che l'unica forza esterna, la reazione vincolare impulsiva esercitata dallo snodo fra coperchio e asta che costringe l'oggetto composto a ruotare intorno al proprio asse anziché schizzare via al momento dell'impatto, ha momento nullo rispetto a quell'asse.

2.2 Il momento di inerzia totale è dato dalla somma del momento di inerzia I dell'oggetto composto da sbarra + asta + ruota e del momento di inerzia del proiettile rispetto all'asse:

$$I_{tot} = I + I_p = I + m\frac{\ell^2}{4} = 8.2825 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

La velocità angolare si ottiene dal momento della quantità di moto dopo l'urto :

$$L_i = mv\frac{\ell}{2} = L_f = I_{tot}\omega_f \implies \omega_f = \frac{L_f}{I_{tot}} = \frac{mv\ell/2}{I_{tot}} = \frac{mv\ell/2}{I + m(\ell/2)^2} = 398.38\,[\mathrm{rad}]/\mathrm{s}$$

2.3 Anche alla quantità di moto iniziale contribuisce solo il proiettile:

$$P_i = mv = 4.3\,\mathrm{kg\,m/s}$$

Cosa meno ovvia, anche dopo l'impatto la quantità di moto del *sistema totale* è quella del solo proiettile, che ora ruota con velocità ω_f a distanza $\ell/2$ dallasse; l'oggetto composto da sbarra + asta + ruota non contribuisce, infatti, alla quantità di moto totale, perché il suo centro di massa si trova lungo l'asse di rotazione:

$$P_f = m\,\omega_f\,\frac{\ell}{2} = mv\frac{m(\ell/2)^2}{I + m(\ell/2)^2} = 0.292\,\mathrm{kg\,m/s}$$

A chi non avesse ancora capito, questo risultato si può spiegare in modo piú prolisso. Dopo l'urto il *sistema totale* (sbarra + asta + ruota + proiettile conficcato nella sbarra) ruota tutto insieme intorno all'asse a velocità angolare ω_f. La quantità di moto del *sistema totale*, data dalla sua massa totale moltiplicata per la velocità del suo centro di massa dopo l'urto, è $P_f = M_{tot}V_c = M_{tot}\omega_f\,R_c$. Per simmetria il centro di massa dell'oggetto composto da sbarra + asta + ruota si trova lungo l'asta, ovvero a distanza zero dall'asse; di conseguenza R_c , che è la distanza dall'asse del centro di massa del *sistema totale*, coincide con la distanza del proiettile dall'asse moltiplicata per il rapporto fra massa del proiettile e massa del *sistema totale*: $R_c = (\ell/2)(m/M_{tot})$. Si ottiene cosí la quantità di moto finale

$$P_f = M_{tot}V_c = M_{tot}\omega_f\,R_c = M_{tot}\omega_f\,\frac{\ell}{2}\frac{m}{M_{tot}} = m\omega_f\frac{\ell}{2} = mv\frac{m(\ell/2)^2}{I + m(\ell/2)^2} = 0.292\,\mathrm{kg\,m/s}.$$

Nota bene: nella formula finale appena vista non appare la massa dell'oggetto composto (o equivalentemente la massa totale M_{tot}), ma soltanto la massa del proiettile.

2.4 L'energia cinetica iniziale è

$$K_i = \frac{1}{2}mv^2 = 924.5\,\mathrm{J}$$

L'energia cinetica finale è diversa (minore) da quella iniziale a causa dell'urto completamente anelastico:

$$K_f = \frac{1}{2}I_{tot}\omega_f^2 = \frac{1}{2}mv^2\frac{m(\ell/2)^2}{I + m(\ell/2)^2} = 62.79\,\mathrm{J}.$$

2.5 L'insieme di gas + oggetto girevole è un sistema isolato: il gas non scambia calore con l'ambiente; l'oggetto girevole, dopo l'urto, scambia energia soltanto con il gas (sotto forma di lavoro isocoro, irreversibile, come nell'esperienza di Joule) e per il resto non compie alcun lavoro sull'ambiente circostante. Di conseguenza per il sistema complessivo composto da gas + oggetto girevole l'energia totale, somma dell'energia interna del gas e dell'energia meccanica della ruota girevole, è una quantità conservata, che non cambia nel tempo: $\Delta U_{tot} = \Delta U_{gas} + \Delta U_{ogg} = 0$. Quando l'oggetto girevole si ferma, l'energia cinetica che aveva immediatamente dopo l'impatto del proiettile è stata integralmente assorbita dal gas:

$$\Delta U_{gas} = -\Delta U_{ogg} = \frac{1}{2}I_{tot}\omega_f^2 = \frac{1}{2}mv^2\frac{m(\ell/2)^2}{I + m(\ell/2)^2} = 62.79\,\mathrm{J}$$

2.6 La dipendenza di U dalla temperatura in $n = 1$ mole di gas perfetto monoatomico dà:

$$\Delta U_{12} = nc_V(T_2 - T_1) \implies T_2 = \frac{2\Delta U_{12}}{3R} + T_1 = 278.03\,\mathrm{K}$$

La pressione si ricava dalla legge dei gas perfetti:

$$p_2 = \frac{RT_2}{V} = 1.032 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} = 1.019\,\mathrm{atm}$$

2.7 La trasformazione appena vista è isocora (avviene a volume costante) ed irreversibile. Per ottenere la corrispondente differenza di entropia, dobbiamo valutarla lungo una trasformazione reversibile che abbia lo stesso stato iniziale e finale: l'entropia è una funzione di stato e fra due stati di equilibrio termodinamico la sua variazione non dipende dalla trasformazione che li connette. A tale scopo una scelta abbastanza naturale è quella di una trasformazione isocora reversibile con la stessa temperatura iniziale e finale dell'altra:

$$\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU}{T} = nc_V\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} = \frac{3}{2}R\,\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 0.228\,\mathrm{J/K}$$