ESERCIZIO A, SCRITTO DEL 18 FEBBRAIO 2014

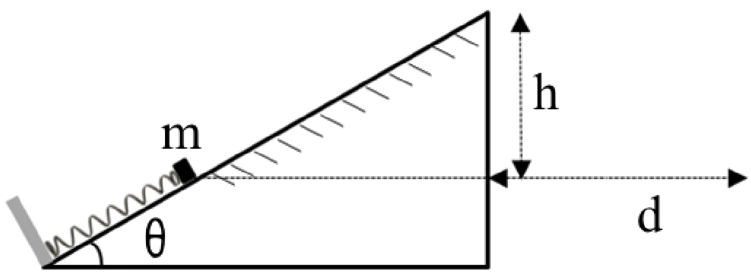
Una molla ideale è fissata alla base di un piano inclinato scabro con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.15$. Il piano è inclinato di un angolo $\theta = 30°$. Appoggiato sull'altra estremità della molla, compressa di una quantità $\Delta = 50$ cm, viene tenuto inizialmente fermo, a quota $h = 2$ m sotto la sommità del piano (vedi figura), un blocchetto di massa $m = 1$ kg. Il blocchetto viene poi lasciato libero e, spinto dalla molla, parte in salita.

A.1 Quale valore k_o deve avere la costante elastica della molla affinché il blocchetto arrivi in cima al piano inclinato con velocità nulla?

A.2 Quanto lavoro compie la forza di attrito fra il punto di partenza e la cima?

A.3 Se la costante elastica k della molla, anziché $k = k_o$ (valore ottenuto in **A.1**), valesse $k = 2k_o$ (il doppio), con quale velocità il blocchetto arriverebbe in cima alla salita?

A.4 In tal caso, in corrispondenza di quale distanza orizzontale d dalla base del piano inclinato (vedi figura) il blocchetto ripasserebbe per la quota iniziale?



Soluzione ESERCIZIO A (3+3+6+6)

A.1 A causa della forza d'attrito l'energia meccanica non si conserva. Il valore della costante elastica necessario a far arrivare in cima il blocchetto a velocità nulla si ottiene dal bilancio energetico:

$$\frac{1}{2}\,k_o\,\Delta^2 = mgh + \mu_d\,mg\,\frac{h}{\tan\theta} \quad\Longrightarrow\quad k_o = \frac{2mgh}{\Delta^2}\left(1 + \frac{\mu_d}{\tan\theta}\right) = 198\ \mathrm{N/m}.$$

A.2 Il lavoro L_a compiuto dalla forza di attrito nel tratto corrispondente all'altezza h è

$$L_a = \text{forza di attrito} \times \text{spostamento} = -\mu_d\,mg\,\frac{h}{\tan\theta} = -5.10\,\mathrm{J}$$

A.3 Dal bilancio energetico ottengo (ponendo $k = 2k_o$) il modulo della velocità v_o del blocchetto quando arriva in cima al piano inclinato:

$$\frac{1}{2}\,k\,\Delta^2 = mgh + \frac{1}{2}mv_o^2 + \mu_d mg\frac{h}{\tan\theta} \Longrightarrow v_o = \sqrt{\frac{k\Delta^2}{m} - 2gh\left(1 + \frac{\mu_d}{\tan\theta}\right)} = 7.04\,\mathrm{m/s}$$

A.4 Finito il piano inclinato, il blocchetto, che stavolta ha una velocità $v_o \neq 0$, comincia un moto parabolico. Posizione e velocità iniziali di questa parabola, se si prendono le x positive verso destra, le y positive verso l'alto e si sceglie opportunamente l'origine delle coordinate, hanno componenti $x_o = 0$, $y_o = h$; $v_{ox} = v_o \cos\theta = 6.10\,\mathrm{m/s}$, $v_{oy} = v_o \sin\theta = 3.52\,\mathrm{m/s}$. Se come istante iniziale $t=0$ scegliamo quello in cui il blocchetto si stacca dal piano inclinato, il suo moto è descritto dalle equazioni

$$x(t) = v_{ox}\, t \;\; ; \;\; y(t) = h + v_{oy}\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

e l'istante t^* in cui il blocchetto ripassa per la quota a cui si trovava al momento della partenza lungo il piano inclinato, cioè $h = 2\mathrm{m}$ sotto la sommità del piano corrisponde alla radice positiva dell'equazione di secondo grado $y(t^*) = 0$

$$t^* = \frac{v_{oy}}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_{oy}}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}} = 1.09\,\mathrm{s}$$

(dei due valori possibili per t^* scegliamo quello positivo perché l'istante cercato è successivo a quello in cui il blocchetto si stacca dal piano). La distanza d dal piano inclinato a cui si trova il blocchetto quando ripassa per quella quota si ottiene poi considerando che lungo la direzione $\hat{x}$ il moto è rettilineo uniforme:

$$d = v_{ox}\, t^* = 6.65\,\mathrm{m}$$

ESERCIZIO B.1

Un disco omogeneo di massa $M = 100$ g e raggio $R = 30$ cm è vincolato a ruotare senza attrito attorno ad un asse fisso perpendicolare al suo piano e passante per il suo centro. Mentre sta ruotando liberamente a velocità angolare costante $\omega_o = 3.46\ \mathrm{s}^{-1}$, sopraggiunge dall'alto con velocità v_o una pallina di massa $m = 1.5$ g che, cadendo verticalmente, lo colpisce a distanza $r = R/2$ dal centro e vi rimane poi appiccicata.

B.1.1 Quanto vale, prima dell'urto, P_a, componente del momento della quantità di moto del sistema disco + pallina lungo l'asse di rotazione?

B.1.2 Spiegare, con meno di 40 parole, il motivo per cui, in quest'urto, P_a si conserva.

B.1.3 Quanto vale, dopo l'urto, la velocità angolare ω del sistema disco + pallina?

Soluzione ESERCIZIO B.1 (3+3+3)

B.1.1 Inizialmente la componente P_a del momento della quantità di moto del sistema lungo l'asse di rotazione è data esclusivamente dal disco in rotazione.

$$P_a = I_d\,\omega_o = \frac{1}{2}MR^2\omega_o = 1.56 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg\,m^2/s}$$

[NB: Prima dell'urto il momento della quantità di moto della pallina rispetto all'asse non è zero, bensí $v_o R/2$; però è un vettore che giace nel piano parallelo al disco e non dà, quindi, contributo alla componente parallela all'asse di rotazione.]

B.1.2 L'unica forza esterna è il vincolo (asse); la componente lungo l'asse di rotazione del momento della reazione vincolare è nulla; perciò la corrispondente componente del momento angolare del sistema si conserva. [NB: c'è una forza esterna, ed è la reazione vincolare, impulsiva, esercitata dall'asse per mantenere orizzontale il piano di rotazione del disco malgrado la botta verticale che il disco riceve dalla pallina; il momento di tale forza esterna è diretto perpendicolarmente all'asse di rotazione, proprio come il momento della quantità di moto della pallina prima dell'urto, che quindi non si conserva: il momento di questa forza impulsiva "si mangia" la componente del momento della quantità di moto del sistema perpendicolare all'asse, che prima dell'urto è $v_o R/2$, e dopo, quando la pallina gira insieme al disco, è zero.]

B.1.3 Dalla conservazione del momento della quantità di moto lungo l'asse di rotazione:

$$I_d\,\omega_o = I_{\mathrm{tot}}\,\omega\ ;\ I_{\mathrm{tot}} = I_d + \frac{mR^2}{4} = \frac{MR^2}{2}\left(1+\frac{m}{2M}\right) \Longrightarrow \omega = \frac{\omega_o}{\left(1+\dfrac{m}{2M}\right)} = 3.44\,\mathrm{s^{-1}}$$

ESERCIZIO B.2

Una mole di gas perfetto monoatomico ($n = 1$), inizialmente in equilibrio termodinamico alla temperatura $T_A = 243$ K, è ermeticamente contenuta nella parte inferiore di un cilindro di sezione S, con pareti e fondo termicamente isolanti, che un pistone mobile di massa trascurabile, anch'esso termicamente isolante, separa dalla parte superiore. Fuori c'è la pressione atmosferica $P_e = 1$ atm, ma oltre ad essa, sul pistone, grava la pressione dovuta al peso di una colonna di mercurio di altezza $h = 76$ cm, che riempie la parte superiore del cilindro. Sapendo che la densità del mercurio è $\rho = 13579$ Kg m^{-3} e ricordando che la costante dei gas è $R = 0.082$ litri atm K^{-1} = 8.32 J K^{-1}, calcolare:

B.2.1 il volume V_A occupato dal gas nello stato di equilibrio termodinamico iniziale A;

B.2.2 il volume V_B occupato dal gas nello stato di equilibrio termodinamico B che il gas raggiunge dopo che, lentamente (trasformazione reversibile), la parte superiore del cilindro viene un po' alla volta svuotata di tutto il mercurio che conteneva;

B.2.3 la variazione di energia interna $\Delta U_{\mathrm{AB}} = U_{\mathrm{B}} - U_{\mathrm{A}}$ e la variazione di entropia $\Delta S_{\mathrm{AB}} = S_{\mathrm{B}} - S_{\mathrm{A}}$ del gas nel passaggio dallo stato di equilibrio termodinamico A allo stato di equilibrio termodinamico B.

Soluzione ESERCIZIO B.2 (3+3+3)

B.2.1 La massa di mercurio contenuta in una colonna di altezza h e base S è $m = \rho S h$, dove ρ è la densità del mercurio, pari a 13579 kg/m^3. La pressione P_A cui è soggetto il gas nello stato A eguaglia la somma della pressione atmosferica e della pressione esercitata da una tale colonna di mercurio: $P_A = P_e + mg/S = P_e + \rho Shg/S = P_e + \rho hg = 2$ atm. [NB Questo risultato si poteva ottenere senza calcoli osservando che l'altezza data è 76 cm, che il fluido è mercurio e che 760 mm di mercurio corrispondono a una atmosfera, ovvero $P_e = \rho hg = 1$ atm.] Sfruttando l'equazione dei gas perfetti otteniamo poi $V_A = nRT_A/P_A = nRT_A/(P_e + \rho hg) = 10^{-2}\text{m}^3 = 10$ litri.

B.2.2 Svuotando lentamente la parte superiore del cilindro, peso del mercurio e pressione diminuiscono gradualmente e il gas compie una trasformazione reversibile; poiché cilindro e pistone sono isolanti termicamente, questa espansione reversibile è un'adiabatica. Il volume finale V_B si ottiene perciò dall'equazione $PV^\gamma =$ costante:

$$V_B = V_A \left(\frac{P_A}{P_B}\right)^{3/5} = V_A \left(1 + \frac{\rho hg}{P_e}\right)^{3/5} = 1.52\, V_A = 1.52\ \times 10^{-2}\text{m}^3 = 15.2\,\text{litri}$$

B.2.3 Per la legge dei gas perfetti $P_B V_B = nRT_B$ la temperatura finale è $T_B = P_B V_B / nR =$

$$= \frac{P_e V_A}{nR}\left(1 + \frac{\rho hg}{P_e}\right)^{3/5} = \frac{P_e}{nR}\frac{nRT_A}{(P_e + \rho hg)}\left(1 + \frac{\rho hg}{P_e}\right)^{3/5} = T_A \left(1 + \frac{\rho hg}{P_e}\right)^{-2/5} = 184\,\text{K},$$

$$\text{da cui } \Delta U_{\text{AB}} = n\, c_V\, (T_B - T_A) = 1 \times \frac{3}{2} \times 8.32\,\text{J}\,\text{K}^{-1} \times (-59\text{K}) = -736\,\text{J}\,;$$

$$\Delta S_{\text{AB}} = 0, \text{essendo la trasformazione adiabatica reversibile.}$$