FISICA GENERALE 1 PER MATEMATICI – PRIMO APPELLO ESTIVO

SOLUZIONI DELLO SCRITTO DEL 26 GIUGNO 2014

Esercizio A – Piano inclinato, masse, fune e molla

(1) All'inizio c'è equilibrio, quindi la tensione della fune T, per la massa M, bilancia la somma della forza di gravità lungo il piano inclinato e della reazione vincolare R (parallele e discordi): $T - Mg\sin\theta + R = 0$; per la massa m la tensione della fune T bilancia lungo l'asse verticale la somma di gravità $-mg$ e forza di richiamo della molla $-kh_\text{o}$ (parallele e concordi): $T - mg - kh_\text{o} = 0$. Da questa equazione si ricava $T = mg + kh_\text{o} = 39.6$ N.

(2) Sostituendo T nell'altra equazione si ottiene $R = Mg\sin\theta - T = Mg\sin\theta - mg - kh_\text{o} = 29$ N.

(3) All'inizio nulla si muove e l'energia meccanica è solo potenziale: $E_\text{o} = K_\text{o} + V_\text{o} = V_\text{o} = \frac{1}{2}kh_\text{o}^2 + mgh_\text{o} + MgH_\text{o}$. Tolto il supporto, M scende tirandosi appresso m (che sale): le due masse si muovono di conserva con velocità uguale in modulo $v_m = v_M$ e l'energia meccanica è $E = K + V = \frac{1}{2}kv_m^2 + \frac{1}{2}kv_M^2 + \frac{1}{2}kh^2 + mgh + MgH$; quando m raggiunge la sua quota massima h_max (e simultaneamente M la sua quota minima H_min), le due masse si fermano ($v_m = v_M = 0$) per un istante, e l'energia meccanica è di nuovo tutta potenziale: $E_\text{stop} = K_\text{stop} + V_\text{stop} = V_\text{stop} = \frac{1}{2}kh_\text{max}^2 + mgh_\text{max} + MgH_\text{min}$. Poiché tutte le forze sono conservative, l'energia meccanica è conservata: $E_\text{stop} = E_\text{o}$; da qui ricaviamo $\frac{1}{2}kh_\text{max}^2 - \frac{1}{2}kh_\text{o}^2 + mg\,(h_\text{max} - h_\text{o}) + Mg\,(H_\text{min} - H_\text{o}) = 0$. Osservando poi che $H_\text{min} - H_\text{o} = -(h_\text{max} - h_\text{o})\sin\theta$ e $h_\text{max}^2 - h_\text{o}^2 = (h_\text{max} + h_\text{o})(h_\text{max} - h_\text{o})$, l'equazione diventa $\frac{1}{2}k(h_\text{max} - h_\text{o})(h_\text{max} + h_\text{o}) + mg\,(h_\text{max} - h_\text{o}) - Mg\,(h_\text{max} - h_\text{o})\sin\theta = 0$, che ha due soluzioni: $h_\text{max} = h_\text{o}$, che scartiamo (restituisce la condizione iniziale, anche lí le velocità sono nulle) e $\frac{1}{2}k(h_\text{max} + h_\text{o}) + mg - Mg\sin\theta = 0$, da cui ricaviamo $h_\text{max} = (2g/k)(M\sin\theta - m) - h_\text{o} = 0.78$ m.

Esercizio B1 – Disco, filo e massa

Se ω è la velocità angolare del disco e T la tensione del filo, la seconda equazione cardinale dei corpi rigidi fornisce per il disco $I\dot\omega = RT$ (RT è il momento di T, unica forza applicata al disco); siccome $I = \frac{1}{2}MR^2$ è il momento d'inerzia di un disco rispetto all'asse centrale perpendicolare, l'equazione diventa $\frac{1}{2}MR\dot\omega = T$. Per la massa m, se z è la sua posizione verticale, vale l'equazione di Newton $m\ddot z = T - mg$. Infine, poiché il filo è inestensibile e non slitta, l'accelerazione verticale della massa m eguaglia l'accelerazione di un punto qualsiasi del bordo del disco: $\ddot z = R\dot\omega$. Combinando le tre equazioni otteniamo $mR\dot\omega + \frac{1}{2}MR\dot\omega = mg$, ovvero l'accelerazione angolare

$$\dot\omega = \frac{mg}{R}\frac{1}{\left(m + \dfrac{M}{2}\right)} = \frac{g}{R}\frac{1}{\left(1 + \dfrac{M}{2m}\right)} = \text{(poiché M=2m)} = \frac{g}{2R} = 100\ \text{rad/s}^2,$$

che non dipende dal tempo: il moto angolare è quindi uniformemente accelerato e l'angolo in funzione del tempo è semplicemente dato da $\omega(t) = \dot\omega t$; per $t = 1$ s otteniamo una velocità angolare $\omega = 100$ rad/s.

Esercizio B2 – Due gas perfetti

(1) Nelle due parti uguali del cilindro $V_A = V_B = V/2$ una mole di gas perfetto $n = 1$, alle due diverse temperature T_A e T_B, si trova rispettivamente a pressione $p_A = nRT_A/V_A = 2RT_A/V$ e $p_B = 2RT_B/V$ (con $p_A = \frac{4}{3}p_B > p_B$ visto che $T_A = \frac{4}{3}T_B > T_B$). In assenza del cavo, la differenza di pressione $\Delta p = p_A - p_B = \frac{1}{3}p_B = \frac{2}{3}RT_B/V$ spingerebbe il setto in modo da espandere V_A a danno di V_B (verso destra nella figura) con una forza $F = S\Delta p$. [NB Se S è la superficie del setto, uguale a quella delle basi del cilindro $S = V/2\ell$, su ciascuno dei due lati del setto la forza esercitata dal rispettivo gas è pari alla sua pressione moltiplicata per la superficie del setto; per tale motivo la risultante di queste due forze, che hanno verso opposto, è $F = S(p_A - p_B) = S\Delta p$]. Se malgrado la differenza di pressione il setto sta fermo, vuol dire che il cavo lo trattiene esercitando su di esso una forza uguale e contraria a F, cioè di modulo pari a $S\Delta p = \frac{2}{3}RT_BS/V = \frac{1}{3}RT_B/\ell = 3380$ N (visto che $V = 2\ell S$).

(2) In base al ragionamento precedente il legame fra temperatura T_A^* e la forza esercitata dal cavo è F^* è dato da $F^* = S(p_A^* - p_B) = R(T_A^* - T_B)/\ell$, da cui $T_A^* = T_B + (F^*\ell/R)$. Poiché la tensione sul cavo eguaglia la forza F^* che esso esercita sul setto, per avere la temperatura oltre la quale il cavo si rompe basta porre nella formula precedente $F^* = 5000N$; si ottiene $T_A^* = 448$ K.