

Gas scaldato con filo elettrico

In un recipiente cilindrico sono contenute $n = 0.15$ moli di N_2 (gas perfetto). Il recipiente non scambia calore con l'esterno ed è chiuso da un pistone che può scorrere senza attrito nel cilindro, ha massa $M = 10$ kg ed è collegato alla base del cilindro da un filo metallico di lunghezza $\ell = 1$ m (il filo è lungo l'asse del cilindro, parallelo alla forza di gravità). La pressione esterna è nulla e il gas si trova inizialmente in uno stato di equilibrio a $T_1 = 223$ K. A questo punto si fa passare una corrente elettrica nel filo che si scalda e cede reversibilmente calore al gas, la cui pressione e temperatura aumentano gradualmente finché il filo si rompe. Se la tensione di rottura del filo è $F_{\text{rott}} = 200$ N e l'energia di rottura è $\Delta E = 200$ J, fornire:

1. il calore Q complessivamente ceduto dal filo al gas; 2. la temperatura finale del gas;
3. la differenza di entropia fra lo stato finale e lo stato iniziale per il gas e per l'ambiente;
4. una stima minima dell'entropia di rottura del filo.

Soluzione

1. Nell'istante in cui il filo si rompe, poiché la pressione esterna è zero, il gas esercita sul pistone una forza (verso l'alto) pari alla somma della forza peso del pistone + la tensione del filo (verso il basso): se S è la superficie di base del cilindro, $F_{\text{gas}} = p_2 S = Mg + F_{\text{rott}}$, $p_2 = (Mg + F_{\text{rott}})/S \Rightarrow nRT_2 = p_2 V_2 = p_2 S \ell = (Mg + F_{\text{rott}})\ell \Rightarrow T_2 = 239$ K con i dati del testo. Il calore viene ceduto dal filo al gas a volume costante, quindi $Q = n c_v \Delta T = 50.3$ J = 12 cal.

2. Nello stato di equilibrio finale, poiché la pressione esterna è zero, quella del gas è $p_3 = Mg/S$. Nel momento della rottura del filo il pistone sale di colpo e solo dopo qualche tempo il gas raggiunge un nuovo volume di equilibrio $V_3 = S(\ell + \Delta h)$ e una nuova temperatura di equilibrio T_3 : la trasformazione $2 \rightarrow 3$ è irreversibile. Inoltre dopo la rottura del filo non c'è più corrente né scambio di calore, quindi la trasformazione irreversibile $2 \rightarrow 3$ è adiabatica.

In questa trasformazione adiabatica il calore scambiato è zero e il lavoro fatto dal gas è la somma del sollevamento del pistone $Mg\Delta h$ e della rottura del filo ΔE . Dal primo principio otteniamo $\Delta U_{23}^{\text{gas}} = -L = -(Mg\Delta h + \Delta E) = n c_v (T_3 - T_2)$. Dalla legge dei gas perfetti $p_3 V_3 = nRT_3$ otteniamo un'altra relazione fra T_3 e Δh : $Mg(\ell + \Delta h) = nRT_3$. Risolvendo il sistema di queste due equazioni e sostituendo i dati otteniamo $T_3 = 170$ K (e $\Delta h = 1.16$ m).

3. $\Delta S_{13}^{\text{gas}} = \Delta S_{12}^{\text{gas}} + \Delta S_{23}^{\text{gas}} = n c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + n c_v \ln \frac{T_3}{T_2} + nR \ln \frac{V_3}{V_2} = (0.216 - 0.102)$ J/K = 0.114 J/K

$\Delta S_{12}^{\text{amb}} = -\Delta S_{12}^{\text{gas}} = -0.216$ J/K perché $1 \rightarrow 2$ è reversibile, l'entropia del filo non cambia e quindi non cambia nemmeno l'entropia dell'universo $\Delta S_{12}^U = \Delta S_{12}^{\text{gas}} + \Delta S_{12}^{\text{amb}} + \Delta S_{12}^{\text{filo}} = 0$; $\Delta S_{23}^{\text{amb}} = 0$ perché $2 \rightarrow 3$ è adiabatica. Se ne conclude che $\Delta S_{13}^{\text{amb}} = -\Delta S_{12}^{\text{gas}} = -0.216$ J/K.

4. L'entropia di rottura del filo deve essere maggiore di 0.102 J/K. Infatti, essendo la trasformazione $2 \rightarrow 3$ irreversibile, deve essere $\Delta S_{23}^U = \Delta S_{23}^{\text{gas}} + \Delta S_{23}^{\text{amb}} + \Delta S_{23}^{\text{filo}} > 0$.