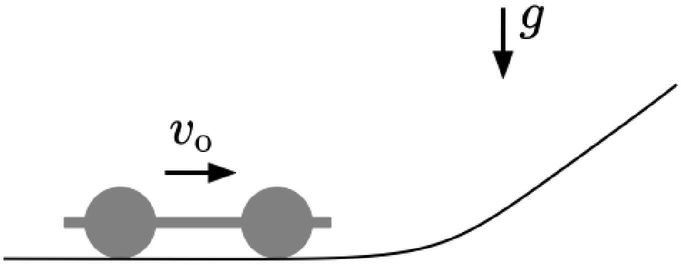
Un carrello nel campo gravitazionale

In presenza di gravità, un carrello fatto di un telaio di massa M e quattro ruote cilindriche omogenee di massa $m = M/16$ e raggio R (che rotolano senza strisciare) viaggia in piano a velocità v_o per imboccare poi un tratto in salita. Quando viaggia in pianura, il centro di massa del carrello è a quota z_C; determinare la quota massima che raggiungerà nella sua salita.



La massa del carrello è $M_\mathrm{carr} = M + 4 \cdot M/16 = 5M/4$ e la sua energia cinetica iniziale è

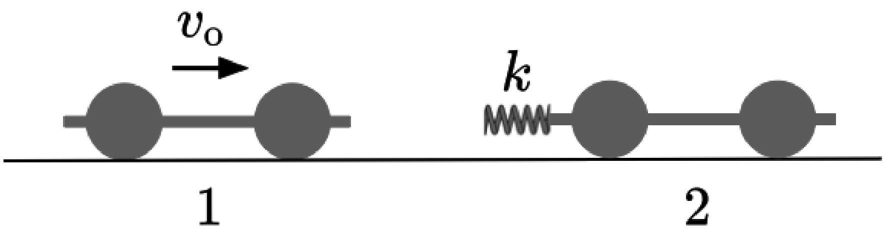
$$E_\mathrm{kin} = \frac{1}{2} M_\mathrm{carr} v_\mathrm{o}^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} I_\mathrm{ruota} \omega_\mathrm{ruota}^2 = \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{16}\right) = \frac{11}{16} M v_\mathrm{o}^2 \ , \text{ poiché } \ I_\mathrm{ruota} = \frac{1}{2} m R^2 = \frac{1}{32} M R^2 \ \text{ e } \ \omega_\mathrm{ruota} = \frac{v_\mathrm{o}}{R}$$

L'unica forza esterna al carrello è la gravità, che è conservativa; l'energia totale iniziale $E_\mathrm{kin} + M_\mathrm{carr}\, g\, z_C$ è conservata e quindi eguaglia l'energia potenziale relativa alla quota massima raggiungibile $M_\mathrm{carr}\, g\, (z_C + \Delta h)$. Da qui si ottiene

$$\frac{11}{16} M v_\mathrm{o}^2 = \frac{5}{4} M g \Delta h \quad \Longrightarrow \quad \Delta h = \frac{11}{20} \frac{v_\mathrm{o}^2}{g} \ , \ h = z_C + \Delta h$$

Due carrelli e una molla

Un carrello identico a quello dell'esercizio precedente viaggia in pianura a velocità v_o fino a venire in contatto con una molla di costante elastica k, lunghezza di riposo non nulla e massa trascurabile, attaccata come in figura all'estremità di un secondo carrello, identico al primo, inizialmente fermo. Determinare la compressione massima della molla e le velocità finali dei due carrelli dopo che la molla si sarà di nuovo completamente distesa.



Il sistema è composto da due carrelli identici 1 e 2. L'energia totale E_tot è conservata perché tutte le forze sono conservative. C'è una forza interna conservativa dovuta alla molla. C'è anche una forza esterna conservativa (solo verticale), la gravità, ma possiamo evitare di considerarla: nel bilancio energetico il potenziale gravitazionale aggiunge una costante irrilevante perché qui il centro di massa (cdm) resta sempre alla stessa quota z_C. All'inizio il carrello 1 ha velocità costante $v_1 = v_\mathrm{o}$, il carrello 2 è fermo $v_2 = 0$, la molla non è compressa: $E_\mathrm{tot} = E_{\mathrm{kin}\,1} + 0 + 0 = (11/16) M v_\mathrm{o}^2$. La componente orizzontale della quantità di moto totale si conserva: la velocità orizzontale del cdm, $v_C = v_\mathrm{o}/2$, è costante. Nel riferimento del cdm le velocità orizzontali dei carrelli 1 e 2 sono uguali in modulo e opposte in segno, perché le loro masse sono identiche: in ogni istante se $v_1 = v_C + v_1'$ e $v_2 = v_C + v_2'$, vale $v_2' = -v_1'$.

Di conseguenza $E_\mathrm{tot} = \frac{11}{16} M v_\mathrm{o}^2 = \frac{11}{16} M \left(v_C + v_1'\right)^2 + \frac{11}{16} M \left(v_C + v_2'\right)^2 + \frac{1}{2} k \Delta x^2 \ \Longrightarrow \ \frac{11}{8} M {v_1'}^2 + \frac{1}{2} k \Delta x^2 = \frac{11}{32} M v_\mathrm{o}^2$

Nell'istante di massima compressione $v_1' = 0 \ \Longrightarrow \ \frac{1}{2} \Delta x_\mathrm{max}^2 = \frac{11}{32} M v_\mathrm{o}^2 \ \Longrightarrow \ \Delta x_\mathrm{max} = \sqrt{\frac{11}{16}} \sqrt{\frac{M}{k}}\, v_\mathrm{o}$; subito dopo è facile vedere che v_1' e v_2' riprendono ad aumentare in modulo con segno scambiato, finché, quando la molla è di nuovo completamente distesa e i carrelli non sono più in contatto attraverso la molla, il primo è rimasto fermo e il secondo viaggia verso destra a velocità costante v_o, come in un urto elastico fra punti materiali di uguale massa.