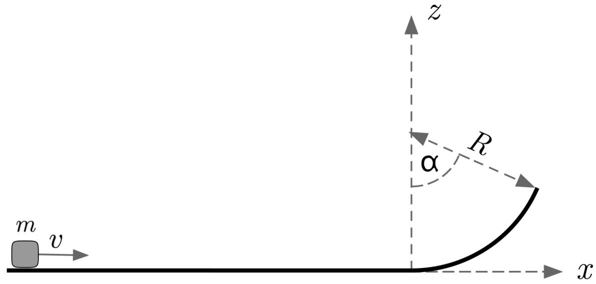
FISICA GENERALE 1 PER MATEMATICI – 18 SETTEMBRE 2014

Esercizio A – Blocchetto su guida (7 punti)

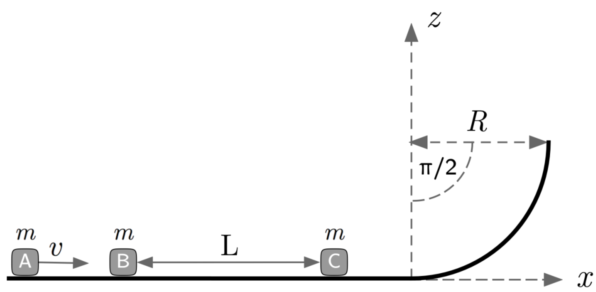


In presenza di gravità, un blocchetto di massa m (punto materiale) parte a velocità $v = 10$ ms^{-1} e quota $z = 0$ lungo il tratto orizzontale rettilineo di una guida liscia (niente attrito) che termina con un arco di circonferenza di raggio $R = 0.5$ m e angolo $\alpha = \pi/4$. Qual è la quota massima $Z > 0$ raggiunta dal blocchetto dopo l'uscita dalla guida?

Soluzione

L'energia meccanica si conserva (tutte le forze sono conservative): se v_o è il modulo della velocità del blocchetto e $z_o = R\,(1 - \cos\alpha)$ è la sua quota quando esce dalla guida, $v_o^2 = v^2 - 2gR\,(1 - \cos\alpha)$. [NB: i dati sono tali che $v > 2gR\,(1 - \cos\alpha)$, altrimenti il blocchetto non uscirebbe dalla guida e tornerebbe indietro.] Appena uscito dalla guida, il blocchetto ha velocità orizzontale $v_{ox} = v_o \cos\alpha$ e velocità verticale $v_{oz} = v_o \sin\alpha$. Poiché lungo la direzione x il moto è rettilineo uniforme, la conservazione dell'energia meccanica implica che lungo la direzione z, dove agisce la forza di gravità, il dislivello massimo raggiunto dal blocchetto rispetto al punto in cui si stacca dalla guida sia $\Delta z = v_o^2 \sin^2\alpha/2g = (v^2 \sin^2\alpha/2g) - R\,(1 - \cos\alpha)\sin^2\alpha$. La quota massima raggiunta è quindi $Z = z_o + \Delta z$, che, utilizzando le definizioni di z_o e Δz, si scrive alla fine come $Z = (v^2 \sin^2\alpha/2g) + R\,(1 - \cos\alpha)\cos^2\alpha$. Sostituendo i dati del problema e $g = 9.81$ ms^{-2} otteniamo $Z = 2.62$ m. [NB: ovviamente a questo stesso risultato si giunge calcolando la legge oraria del blocchetto dopo l'uscita dalla guida.]

Esercizio B – Tre blocchetti su guida (15 punti)



In presenza di gravità, un blocchetto A di massa m (punto materiale) parte a velocità $v = 10$ ms^{-1} e quota $z = 0$ lungo il tratto orizzontale rettilineo di una guida liscia (niente attrito) sul quale si trovano altri due blocchetti identici B e C a distanza $L = 1$ m fra loro (vedi figura). La guida termina con un arco di circonferenza di raggio $R = 0.5$ m e angolo $\pi/2$.

Nel caso che tutti gli urti siano perfettamente elastici, determinare:

1a. L'intervallo di tempo Δt_1 che intercorre fra l'urto A–B e l'urto B–C.

1b. La quota massima $Z_1 > 0$ raggiunta dal blocchetto C dopo l'uscita dalla guida.

Nel caso che tutti gli urti siano completamente anelastici, determinare:

2a. L'intervallo di tempo Δt_2 che intercorre fra l'urto A-B e l'urto B-C.

2b. La quota massima $Z_2 > 0$ raggiunta dal blocchetto C dopo l'uscita dalla guida.

Soluzione

1. Urti perfettamente elastici – Poiché le tre masse sono uguali e i blocchetti B e C sono inizialmente fermi, dopo il primo urto A si ferma e B parte con velocità v, e dopo il secondo urto B si ferma e C parte con velocità v. **1a.** Fra il primo e il secondo urto B viaggia a velocità v quindi $\Delta t_1 = L/v = 0.1$ s **1b.** Dopo l'ultimo urto il blocchetto C, per la conservazione dell'energia meccanica, esce dalla guida a quota R con velocità verticale $v_o = \sqrt{v^2 - 2gR}$ e sale ancora di un Δz tale che $mg\Delta z = \frac{1}{2}mgv_o^2$, giungendo cosí alla quota massima $Z_1 = R + v_o^2/2g = v^2/2g = 5.1$ m; a questo risultato, osservando che il moto dopo l'uscita dalla guida non ha componente orizzontale, si poteva arrivare anche direttamente, imponendo che l'energia potenziale alla quota massima eguagli l'energia cinetica iniziale: $mgZ_1 = \frac{1}{2}mv^2$. [NB: ovviamente a questo stesso risultato si giunge calcolando la legge oraria del blocchetto C dopo l'uscita dalla guida.]

2. Urti completamente anelastici – Dopo il primo urto i due blocchetti identici A e B viaggiano appiccicati, formando un unico blocchetto A+B di massa $2m$; dopo il secondo urto tutti e tre i blocchetti identici A, B e C viaggiano appiccicati, formando un unico blocchetto A+B+C di massa $3m$. Per la conservazione della quantità di moto totale, dopo il primo urto il blocchetto A+B parte con velocità $v' = v/2$, e dopo il secondo urto il blocchetto A+B+C parte con velocità $v'' = v/3$. **2a.** Fra il primo e il secondo urto $\Delta t_2 = L/v' = 2L/v = 0.2$ s **2b.** Per la conservazione dell'energia meccanica (cfr. punto **1b.**) il blocchetto A+B+C raggiunge la quota massima $Z_2 = v''^2/2g = v^2/18g = 0.566$ m. [NB: ovviamente a questo stesso risultato si giunge calcolando la legge oraria del blocchetto A+B+C dopo l'uscita dalla guida.]

Esercizio C – Gas perfetto (8 punti)

Un gas perfetto monoatomico in equilibrio termodinamico, inizialmente contenuto nel volume V_A, viene riscaldato molto lentamente in modo tale che la sua pressione p aumenti, reversibilmente, secondo la legge $p = \alpha V$ (α è una costante e V il volume occupato dal gas), fino a raggiungere il volume finale $V_B = 2V_A$. Determinare il calore assorbito dal gas nel corso dell'intera trasformazione reversibile che lo porta dallo stato A allo stato B. [NB: in questo esercizio non sono forniti dati numerici, quindi si richiede solo la formula risolutiva e una breve illustrazione del ragionamento grazie al quale è stata ottenuta.]

Soluzione

$$L_{AB} = \int_A^B p\,dV = \int_A^B \alpha\, V dV = \frac{1}{2}\,\alpha\left[V_B^2 - V_A^2\right] \quad ;$$

$$\Delta U_{AB} = n\,c_V\,(T_B - T_A) = n\,\frac{3}{2}R\left(\frac{p_B V_B}{R} - \frac{p_A V_A}{R}\right) = \frac{3}{2}\,\alpha\left(V_B^2 - V_A^2\right) \quad ;$$

$$Q_{AB} = L_{AB} + \Delta U_{AB} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)\alpha\big(V_B^2 - V_A^2\big) = 2\alpha\big(4V_A^2 - V_A^2\big) = 6\alpha V_A^2$$