7. CENNI DI GEOMETRIA DELLE AREE

Momenti statici

Si consideri una figura geometrica riferita ad assi cartesiani non necessariamente baricentrici come in fig.1 e siano A l'area totale della figura e G il suo baricentro di coordinate x_g, y_g. Si definiscono *momenti statici* della figura rispetto agli assi y e z, rispettivamente, i seguenti integrali

$$S_y = \int_A z\, dA \qquad\qquad S_z = \int_A y\, dA\,. \tag{7.1,2}$$

I momenti statici possono essere espressi in funzione delle coordinate del baricentro della figura come segue

$$S_y = z_G A \qquad\qquad S_z = y_G A \tag{7.3,4}$$

In base alle (1-4) si osserva che i momenti statici possono assumere valori positivi o negativi in dipendenza dell'orientamento degli assi.

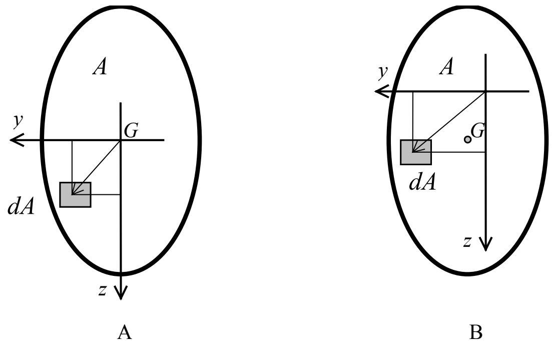

Fig.7.1 – Momenti statici: A) assi di riferimento baricentrici, B) assi di riferimento non baricentrici.

Baricentro

Le coordinate del baricentro di una figura possono essere ricavate dai momenti statici invertendo le relazioni (3,4):

$$y_G = S_z / A \qquad\qquad z_G = S_y / A \tag{7.5,6}$$

Momenti di inerzia assiali e polare

Si definiscono *momenti di inerzia* della figura rispetto agli asse y e z rispettivamente, i seguenti integrali

$$I_y = \int_A z^2 dA; \qquad\qquad I_z = \int_A y^2 dA \tag{7.7,8}$$

Si definisce *momento centrifugo* (o biassiale) della figura rispetto agli assi y e z il seguente integrale:

$$I_{yz} = \int_A yz\, dA \tag{7.9}$$

Si definisce *momento polare* della figura rispetto al polo p il seguente integrale

$$I_p = \int_A r^2 dA \tag{7.10}$$

essendo r la distanza dal polo. E' evidente la seguente relazione tra momento polare e momenti assiali:

$$I_p = \int_A \left(y^2 + z^2\right) dA = I_y + I_z \tag{7.11}$$

I momenti d'inerzia assiali e quello polare sono sempre positivi e sempre maggiori di 0, mentre quello centrifugo può assumere valori positivi, negativi o nulli.

Si definiscono *raggi o giratori di inerzia* (assiali e polare) le seguenti quantità:

$$\rho_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad\qquad \rho_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \qquad\qquad \rho_p = \sqrt{\frac{I_p}{A}} \tag{7.12a,b,c}$$

Momenti di figure composte

I momenti di inerzia di figure composte da più elementi possono essere ottenuti come somma o differenza dei momenti delle singole figure. Ad esempio, i momenti della sezione ad 'I' di fig.2 rispetto ad un asse, possono essere ottenuti come somma dei momenti dei tre rettangoli rispetto all'asse stesso, mentre i momenti relativi al cerchio cavo di fig.2 possono essere ottenuti come differenza tra i momenti relativi al cerchio esterno e quelli relativi al cerchio interno.

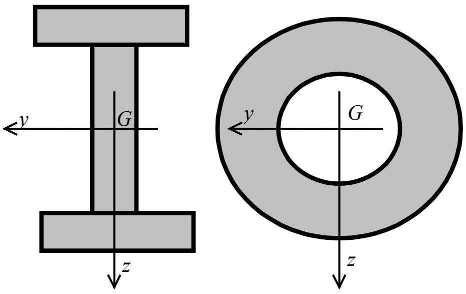

Fig.7.2 – Figure composte.

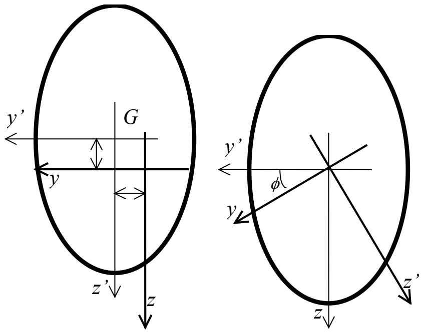

Fig.7.3 – Traslazione e rotazione di assi.

Teoremi di trasposizione

I momenti di inerzia di una figura rispetto ad assi y e z paralleli ad assi $y'z'$ baricentrici (fig.3), possono essere espressi mediante le seguenti equazioni:

$$I_z = I_{z'} + y_0^2 \, A \qquad I_y = I_{y'} + z_0^2 \, A \qquad I_{yz} = I_{y'z'} + y_0 z_0 \, A \tag{7.13,14,15}$$

nelle quali y_0=y_G e z_0=z_G sono le distanze tra gli assi, ovvero le coordinate del baricentro dell'area rispetto agli assi non baricentrici y e z.

Le relazioni (13,14) mostrano che, tra i momenti di inerzia valutati rispetto ad assi paralleli, quello relativo all'asse baricentrico è il minimo. In base alla (15) si osserva che il momento centrifugo valutato rispetto a una coppia di assi di cui uno è baricentrico, annullandosi il prodotto y_0z_0, risulta indipendente dalla posizione dell'altro asse.

Rotazione d'assi

I momenti di inerzia di una figura valutati rispetto ad assi yz ruotati di un angolo ϕ rispetto alla coppia $y'z'$, possono essere espressi in funzione dei momenti rispetto ad $y'z'$ mediante le seguenti relazioni:

$$I_z = \frac{\left(I_{y'} + I_{z'}\right)}{2} + \frac{\left(I_{y'} - I_{z'}\right)}{2} \cos 2\phi - I_{y'z'} \operatorname{sen} 2\phi \tag{7.16}$$

$$I_y = \frac{\left(I_{y'} + I_{z'}\right)}{2} - \frac{\left(I_{y'} - I_{z'}\right)}{2} \cos 2\phi + I_{y'z'} \operatorname{sen} 2\phi \tag{7.17}$$

$$I_{yz} = \frac{\left(I_{y'} - I_{z'}\right)}{2} \operatorname{sen} 2\phi + I_{y'z'} \cos 2\phi \tag{7.18}$$

Assi principali

Si definiscono *assi principali di inerzia* due assi ortogonali per i quali il momento centrifugo risulta nullo. I momenti di inerzia rispetto a tali assi si definiscono *momenti principali di inerzia*

L'angolo formato tra la coppia d'assi principali yz e una coppia di assi non principali $y'z'$ è dato dalla seguente espressione

$$\tan 2\phi = \frac{2I_{y'z'}}{I_{z'} - I_{y'}} \tag{7.19}$$

A loro volta, i valori dei momenti principali di inerzia possono essere ottenuti dai momenti rispetto ad assi non principali mediante le seguenti relazioni:

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}\left[I_{y'} + I_{z'} \pm \sqrt{\left(I_{y'} + I_{z'}\right)^2 + 4I_{y'z'}^2} \right] \tag{7.20}$$