

## Applicazioni ed esempi.

### 1) Solidi a simmetria sferica.

In questo caso, qualunque terna di assi passanti per il c.d.m. può essere scelta come  $u, v$  e  $w$ , con  $I_u = I_v = I_w$ , e le equazioni di Eulero sono quindi completamente disaccoppiate:

$$M_u^{(e)} = I_u \frac{d\omega_u}{dt}, \quad M_v^{(e)} = I_v \frac{d\omega_v}{dt}, \quad M_w^{(e)} = I_w \frac{d\omega_w}{dt}$$

Se  $\vec{M}^{(e)} = 0$ , può essere mantenuto qualunque stato di rotazione, con i vettori  $\vec{P}$  ed  $\omega$  costanti.

### 2) Trottola simmetrica (solido con un asse di simmetria).

In questo caso  $v$  e  $w$  possono essere scelti arbitrariamente in un piano ortogonale all'asse di simmetria  $u$ . Sarà  $I_u \neq I_v = I_w$  e solo la prima equazione risulta disaccoppiata dalle altre due:  $M_u^{(e)} = I_u \frac{d\omega_u}{dt}$ .

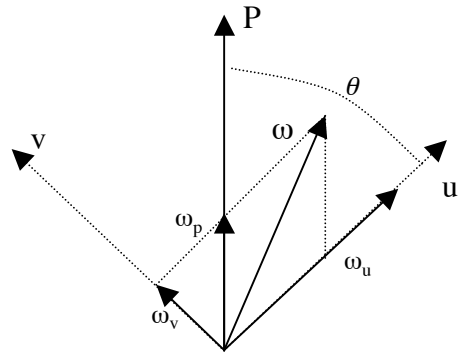
#### 2.a) Trottola simmetrica libera.

Il vettore momento angolare  $\vec{P}$  si deve mantenere costante in modulo e direzione. Indichiamo con  $\vartheta$  l'angolo di  $\hat{u}$  con  $\vec{P}$ . Dalla prima equazione si ricava immediatamente:

$$M_u = 0 \Rightarrow \dot{\omega}_u = 0 \Rightarrow \omega_u = \frac{P_u}{I_u} = \frac{P \cos \vartheta}{I_u} = \text{costante},$$

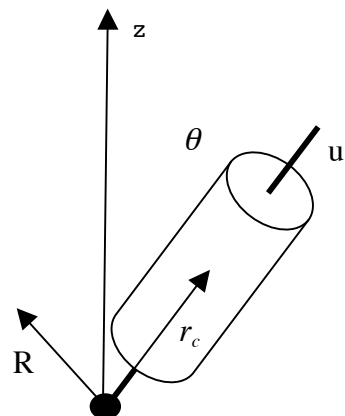
e quindi anche l'angolo  $\vartheta$  si mantiene costante nel tempo. Scegliamo  $\hat{w}$  ortogonale a  $\vec{P}$ :  $P_w = 0$ ;  $\omega_w = 0$ . Il vettore  $\omega$  giace sul piano individuato da  $\hat{u}$  e  $\vec{P}$ . Rimane ora da calcolare la rotazione (detta *precessione*) di  $\hat{u}$  (e quindi di tutto il solido) intorno a  $\vec{P}$ . Se si considera la rotazione elementare del solido, questa risulta da una rotazione intorno ad  $\hat{u}$  combinata con una rotazione intorno a  $\vec{P}$  (precessione). Per trovare la velocità angolare di precessione, bisogna quindi scomporre il vettore  $\omega$  secondo la regola del parallelogramma, come indicato in figura.

Si ottiene quindi:  $\sin \vartheta \omega_p = \omega_v = \frac{P_v}{I_v} \Rightarrow \omega_p = \frac{P_v}{I_v \sin \vartheta} = \frac{P}{I_v}$



#### 2.b) Trottola simmetrica con un punto dell'asse di simmetria fisso.

Indichiamo la posizione del c.d.m. rispetto al punto fisso con  $\vec{r}_c$ , che sarà quindi diretto come  $\hat{u}$ . Sul corpo agiranno la forza di gravità, che si assumerà diretta lungo un asse  $z$ , formante un angolo  $\vartheta$  con  $u$ , e la reazione vincolare  $R$ . La gravità ha momento nullo rispetto al c.d.m. e il momento della reazione vincolare,  $-\vec{r}_c \wedge \vec{R}$ , sarà ortogonale ad  $\hat{u}$  e tenderà a far ruotare  $\vec{P}$  lasciando invariata la componente  $P_u$ . Se assumiamo che questa



rotazione di  $\vec{P}$  (precessione) sia lenta rispetto a  $\omega_u$  (*trottola veloce*), possiamo considerare che per un certo numero di periodi di rotazione il momento angolare rispetto al c.d.m. si mantenga costante. In questo intervallo di tempo il solido si comporterà come un corpo libero e il suo asse principale precederà intorno al momento angolare (nutazione) con velocità angolare data da  $\omega_n = \frac{P}{I_u}$ . Se anche la nutazione è

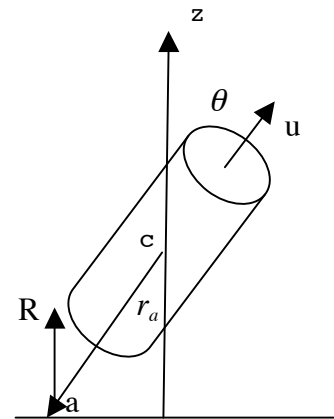
rapida rispetto alla precessione, per valutare l'effetto delle forze esterne possiamo sostituire al vettore  $\vec{r}_c$  il suo valor medio che sarà dato dalla sua proiezione su  $\vec{P}$ , per cui  $\langle \vec{r}_c \rangle \equiv r_c \cos \alpha \frac{\vec{P}}{P}$  dove  $\alpha$  è l'angolo tra  $\vec{r}_c$  e  $\vec{P}$ ; se  $\alpha$  è piccolo, si può ulteriormente

porre  $\cos \alpha \approx 1$ . Utilizziamo ora la seconda equazione cardinale con polo nel punto fisso (se il momento angolare è diretto come  $\vec{r}_c$ , il cambio del polo non cambia  $\vec{P}$ ). Il momento di  $\vec{R}$  è nullo e il momento delle forze esterne è  $\vec{M} \equiv \langle \vec{r}_c \rangle \wedge m\vec{g} \equiv r_c \frac{\vec{P} \wedge m\vec{g}}{P}$ ,

ortogonale quindi sia a  $\vec{P}$  che all'asse  $z$ , per cui si conserva sia il modulo di  $P$  che la sua componente lungo  $z$ ,  $P \cos \vartheta$ , e l'angolo  $\vartheta$  deve rimanere costante. La precessione avviene quindi intorno a  $z$  e la velocità di precessione si ottiene uguagliando al modulo di  $M$  la formula di Poisson per la derivata di un vettore costante:  $mgr_c \sin \vartheta = \left| \frac{dP}{dt} \right| = |\vec{\omega}_p \wedge \vec{P}| = \omega_p P \sin \vartheta$ , da cui si ricava  $\omega_p = \frac{mgr_c}{P}$ . A posteriori, notiamo che  $\omega_u$  e  $\omega_n$  sono entrambe proporzionali a  $P$ , mentre  $\omega_p$  è inversamente proporzionale ad esso, per cui le condizioni  $\omega_u, \omega_n \gg \omega_p$  richiedono, a parità degli altri parametri, una grande velocità di rotazione del solido intorno al proprio asse.

### 2.c) Trottola simmetrica su un piano privo d'attrito.

Anche in questo caso possiamo fare l'approssimazione di trottola veloce, per cui, mediando sulle rapide nutazioni, la direzione media di  $\hat{u}$ , e quindi di  $\vec{r}_c$  coincide con quella di  $\vec{P}$ . Indichiamo la posizione del punto di appoggio  $a$  rispetto al c.d.m. con  $\vec{r}_a = -\vec{r}_c$ , che sarà quindi diretto lungo  $\hat{u}$ . La gravità ha momento nullo rispetto al c.d.m. mentre la reazione vincolare  $R$ , in assenza di attrito, è diretta come  $z$ . Il momento della reazione vincolare,  $\vec{r}_a \wedge \vec{R}$ , sarà ortogonale



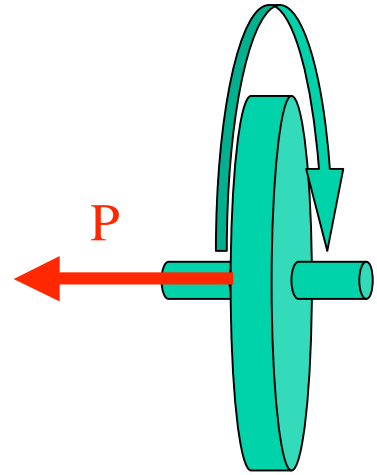
sia a  $z$  che ad  $\hat{u}$  e quindi a  $\vec{P}$ . Di nuovo, si conserva sia il modulo di  $P$  che la sua componente lungo  $z$ ,  $P \cos \vartheta$ , e l'angolo  $\vartheta$  deve rimanere costante. Il centro di massa non è inoltre soggetto ad accelerazioni: infatti tutte le forze esterne sono verticali, per cui non c'è accelerazione sul piano  $xy$ . Dovendo rimanere  $\vartheta$  costante, sarà costante anche la quota del c.d.m. e quindi nulla anche l'accelerazione verticale, da cui si ricava  $\vec{R} = -m\vec{g}$ . L'unico moto possibile è quindi la precessione dell'asse  $\hat{u}$  (e in conseguenza del vettore  $\vec{P}$ ) intorno alla verticale. Per calcolare la velocità angolare di precessione, basta uguagliare il momento di  $R$ ,  $\vec{M} = -\vec{r}_a \wedge m\vec{g}$ , in

modulo  $mgr_c \sin \vartheta$ , alla derivata di  $\vec{P}$  che, sempre per la formula di Poisson, può essere scritta come  $\left| \frac{d\vec{P}}{dt} \right| = \left| \vec{\omega}_p \wedge \vec{P} \right| = \omega_p P \sin \vartheta$ . Si trova  $\omega_p = \frac{mgr_c}{P}$  come nel caso precedente.

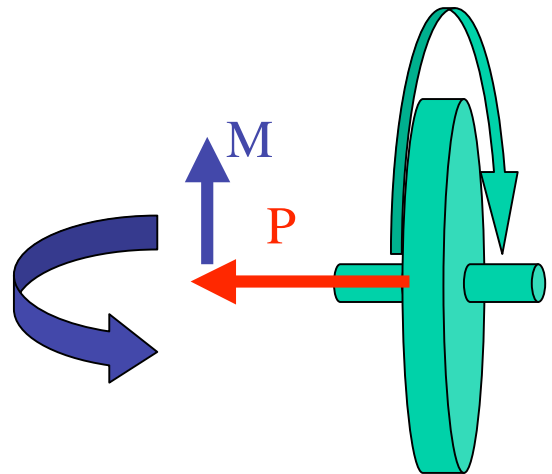
## Variazioni della direzione del momento angolare

Come si fa per far cambiare direzione al momento angolare?

Supponiamo di avere una ruota con un manubrio, in rotazione come indicato in figura.



Istintivamente, per ruotare l'asse di rotazione, per esempio, verso sinistra, si potrebbe pensare di agire con una coppia sul manubrio, come indicato a fianco. Ma il momento applicato sarebbe diretto verso l'alto, e tale sarebbe la variazione di  $P$ , secondo la seconda equazione cardinale.



Il risultato sarebbe quindi quello di far ruotare il momento angolare verso l'alto, come indicato in figura!

Per ottenere la rotazione voluta, si deve invece applicare un momento orizzontale, come nella figura in basso. Per esempio, in sella ad una motocicletta, tale momento si può facilmente ottenere spostando il peso verso sinistra. In questo modo si ottiene un momento di forze esterne sul piano orizzontale diretto all'indietro, che fa ruotare il momento angolare, e quindi l'asse di rotazione, nella direzione voluta.

