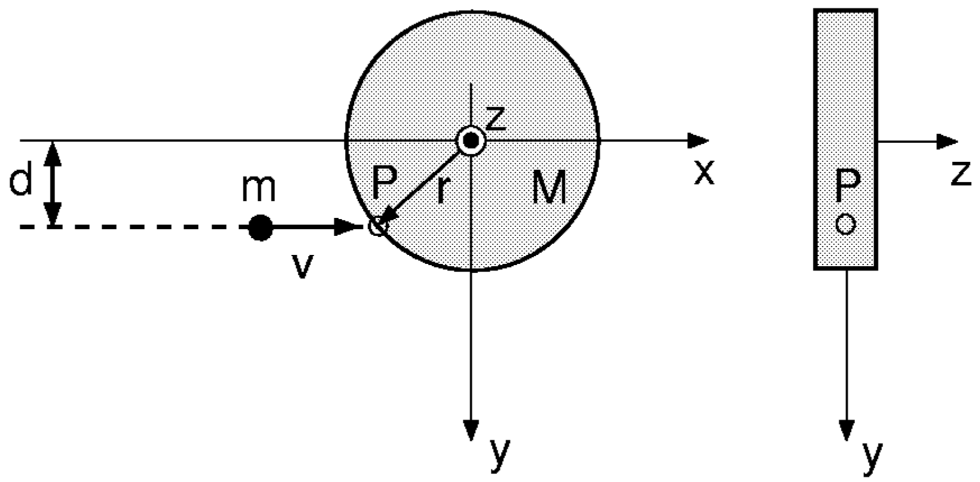
Meccanica dei Sistemi, secondo scritto in aula, 30 maggio 2002

Un cilindro omogeneo di raggio r e massa M è libero di ruotare attorno al proprio asse, orizzontale (nella figura l'asse z); l'asse di rotazione del cilindro è vincolato a restare fisso nel tempo. Un proiettile di massa m e velocità v, parallela e concorde all'asse delle x disegnato in figura (quindi orizzontale e perpendicolare all'asse del cilindro), che viaggia a distanza d dall'asse x, colpisce la superficie laterale del cilindro nel punto P, equidistante dalle basi del cilindro, e vi rimane conficcato (urto totalmente anelastico).

1. Determinare la velocità angolare ω del sistema "disco+proiettile" subito dopo l'urto.
2. Determinare le componenti Q_x e Q_y dell'impulso trasferito all'asse del disco, riportando schematicamente il vettore sul disegno.
3. Determinare l'energia dissipata in quest'urto anelastico.
4. Determinare l'angolo di rotazione massima $\theta_{\max}$ che il vettore posizione del proiettile $\vec{r}$ forma con l'asse verticale y (l'angolo θ è negativo al momento dell'impatto e nullo quando il vettore posizione $\vec{r}$ è parallelo e concorde all'asse y).
5. Determinare il valore v_1 che dovrebbe avere la velocità iniziale del proiettile affinché l'angolo di rotazione massima sia di $20°$, e, in questa circostanza, determinare il periodo T delle piccole oscillazioni del sistema "disco+proiettile".



i dati si trovano nel foglio personale sul quale dovete scrivere le risposte

Meccanica dei Sistemi, scritto del 30/5/2002: soluzioni

1. Per la conservazione del momento della quantità di moto rispetto all'asse z

$$mvd = \left(\frac{1}{2}Mr^2 + mr^2\right)\omega \Rightarrow \omega = \frac{2mvd}{(M+2m)r^2}.$$

2. La quantità di moto del proiettile subito prima dell'urto è $q_{ix} = mv$, $q_{iy} = 0$, e subito dopo l'urto è $q_{fx} = m\omega d$, $q_{fy} = m\omega\sqrt{r^2-d^2}$. La quantità di moto del cilindro è sempre nulla: il suo centro di massa è fisso. L'impulso *trasferito* all'asse è:

$$Q_x = -\left(q_{fx} - q_{ix}\right) = \left[1 - \frac{2md^2}{(M+2m)r^2}\right] mv > 0,$$

$$Q_y = -\left(q_{fy} - q_{iy}\right) = -\frac{2md\sqrt{r^2-d^2}}{(M+2m)r^2} mv < 0.$$

3. Poichè $K_i = \frac{1}{2}mv^2$, $K_f = \frac{1}{4}(M+2m)r^2\omega^2$, si ha

$$K_f - K_i = \frac{1}{2}mv^2\left[\frac{2md^2}{(M+2m)r^2} - 1\right] = -\frac{1}{2}vQ_x < 0.$$

4. Per la conservazione dell'energia

$$\frac{r^2}{4}\left(M+2m\right)\omega^2 - mgd = -mgr\cos\theta_{\max} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_{\max} = \arccos\left[\frac{d}{r} - \frac{mv^2d^2}{gr^3(M+2m)}\right].$$

5. Il valore richiesto v_1 si ricava determinando $\omega_1 = 2mv_1d/(M+2m)r^2$ come al punto 1), e procedendo in maniera analoga al punto 4), ma richiedendo ora che $\cos\theta_{\max} = \sqrt{3}/2$. Cosí si trova

$$v_1 = \sqrt{\frac{g(M+2m)(2d-\sqrt{3}r)r^2}{2md^2}}.$$

Dall'equazione del moto $\frac{1}{2}(M+2m)r^2\ddot{\theta} = -mgr\sin\theta$, ponendo $\sin\theta \simeq \theta$ per $\theta \le 30^o$, si ottiene l'equazione di un oscillatore armonico nella variabile θ, il cui periodo è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(M+2m)r}{2mg}}.$$