Meccanica dei Sistemi
soluzioni della seconda prova scritta di esonero
venerdí 18 giugno 2004

Le equazioni cardinali del sistema sono:

$$\begin{aligned} mg - T_2 &= ma_m \\ (T_2 - T_1)r &= I_c\dot{\omega}_c \\ T_1 R &= I_M\dot{\omega}_M \\ T_1 &= Ma_M, \end{aligned} \qquad (1)$$

dove abbiamo indicato rispettivamente con T_2 e T_1 le tensioni dei due tratti di corda tra la massa m e la carrucola e la carrucola ed il cilindro. Inoltre $I_c = \frac{1}{2}m_0r^2$ e $I_M = \frac{1}{2}MR^2$ sono rispettivamente i momenti d'inerzia assiali della carrucola (schematizzata come un disco) e del cilindro.

Tra le accelerazioni lineari e angolari sussistono le seguenti relazioni (come conseguenza del fatto che la corda scorre senza strisciare sulla carrucola e si srolota senza strisciare dal cilindro):

$$\begin{aligned} a_m &= a_M + \dot{\omega}_M R \\ a_m &= \dot{\omega}_c r. \end{aligned} \qquad (2)$$

1. Facendo il rapporto tra la terza e la quarta delle (1) si ha

$$\dot{\omega}_M = \frac{2a_M}{R} \qquad (3)$$

2. e, inserendo la (3) nella prima delle (2), si ha

$$a_M = \frac{a_m}{3}. \qquad (4)$$

Dalle precedenti relazioni e dalle (3) si ricava anche

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_M &= \frac{2a_m}{3R} \\ \dot{\omega}_c &= \frac{a_m}{r}. \end{aligned} \qquad (5)$$

3. Inserendo le espressioni per a_M, $\dot{\omega}_M$ e $\dot{\omega}_c$ in funzione di a_m nelle equazioni (1) si ottiene un'equazione per a_m da cui si ricava:

$$a_m = g\frac{m}{m + M/3 + m_0/2} \qquad (6)$$

4. D'altra parte, utilizzando le (5) si ricava:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_M &= \frac{2g}{3R}\frac{m}{m + M/3 + m_0/2} \\ \dot{\omega}_c &= \frac{g}{r}\frac{m}{m + M/3 + m_0/2}. \end{aligned}$$

5. Dall'inizio del moto le velocità lineari ed angolari del sistema sono date da (con ovvio significato dei simboli):

$$\begin{aligned} v_m(t) &= a_m t \\ v_M(t) &= a_M t \\ \omega_M(t) &= \dot{\omega_M} t \\ \omega_c(t) &= \dot{\omega_c} t. \end{aligned}$$

Dopo $t = t^*$ secondi dall'inizio del moto le energie cinetiche richieste sono:

$$\begin{aligned} K_M(t^*) &= \frac{1}{2}Mv_M^2(t^*) + \frac{1}{2}I_M\omega_M^2(t^*) \\ K_{m_0}(t^*) &= \frac{1}{2}I_c\omega_c^2(t^*). \end{aligned}$$

Nota alla risposta 2. Contrariamente a quanto detto a voce in alcune risposte alle vostre domande (mai fidarsi dei professori) era effettivamente possibile dalle sole equazioni di Newton ricavare un'altra relazione, anch'essa valida, fra a_m ed a_M, e precisamente

$$\left(m + \frac{1}{2}m_0\right)a_m + Ma_M = mg \qquad (7)$$

Tale relazione non include la relazione cinematica dovuta all'inestensibilità del filo e pertanto non è altrettanto utile nella soluzione delle domande successive quanto quella che abbiamo prima indicato nella risposta **2.**, e quindi tutto sommato il fatto di avervi distolto da quella strada e suggerito di utilizzare l'inestensibilità del filo non è stato un cattivo consiglio. Ma onestamente della possibilità di tirare fuori un'altra relazione giusta fra a_m ed a_M non ci eravamo proprio accorti prima della correzione! e a quelli che hanno scritto tale relazione alternativa come risposta **2.** abbiamo naturalmente dato lo stesso punteggio che abbiamo dato a quelli che hanno dato la risposta alla quale pensavamo noi.