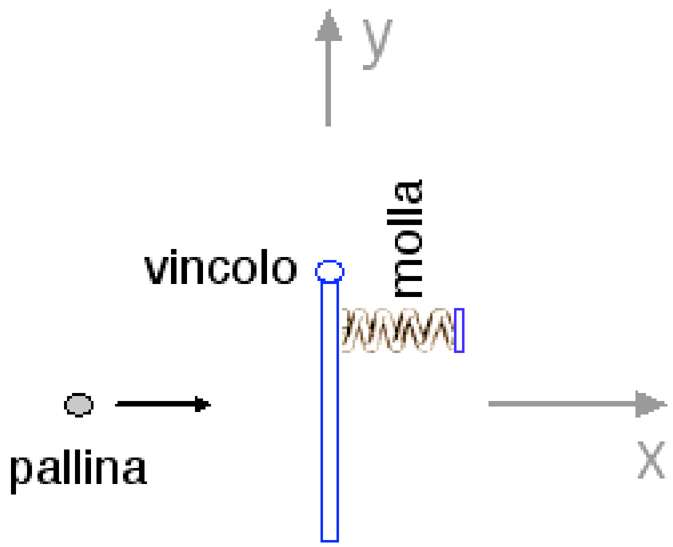
Meccanica dei Sistemi 2004-2005

Seconda prova scritta di esonero, venerdí 17 giugno 2005

Un'asta di massa M = 0.15 kg e lunghezza L = 1.5 m è vincolata a ruotare liberamente nel piano *xy* attorno a un'estremità. A distanza di L/5 dal vincolo l'asta è attaccata a una molla parallela all'asse *x*, di costante elastica k = 64 N/m, fissa sul piano all'altra estremità; la molla è a riposo quando l'asta è nella posizione iniziale, mostrata in figura (vista dall'alto). Una pallina di stucco puntiforme viene lanciata ortogonalmente all'asta e al tempo t = 0 la colpisce esattamente al centro, rimanendovi attaccata. La massa della pallina è m = 0.025 kg e la sua velocità è v = 4.0 m/s.

1. Qual è la velocità angolare dell'asta subito dopo l'impatto della pallina?
1. Qual è l'impulso fornito dal vincolo nell'impatto?
1. Qual è la pulsazione delle piccole oscillazioni dell'asta dopo l'impatto?
1. Qual è l'angolo massimo raggiunto dall'asta nelle piccole oscillazioni? Verificare se per tale angolo l'approssimazione delle piccole oscillazioni sia valida entro l'1%.
1. Disegnare il grafico della coordinata x della pallina in funzione del tempo t nell'intervallo di tempo compreso fra t = –2T e t = 2T, dove T è il periodo delle piccole oscillazioni.



1. Nell'impatto la molla non conta perché la sua forza non è impulsiva: si conserva il momento angolare totale rispetto al vincolo. Prima dell'impatto il momento angolare totale è $mvL/2$. Subito dopo l'urto il momento d'inerzia dell'asta col proiettile conficcato è $I = (ML^2/3 + mL^2/4) = (M/3 + m/4)L^2$. Se ω è la velocità angolare di asta+proiettile subito dopo l'urto, dalla conservazione del momento angolare $mvL/2 = I\omega$ si ha $\omega = mvL/(2I) = 6mv/[(4M + 3m)L] = 0.59\ s^{-1}$. [0.5926]

2. La quantità di moto totale prima dell'urto è mv; subito dopo l'urto è pari alla massa totale M+m per la velocità del centro di massa $v_c = \omega L/2 = 3mv/(4M + 3m)$. L'impulso fornito dal vincolo nell'impatto è $J_R = (M + m)v_c - mv = - Mv/[3 + (4M/m)] = - mv/[4 + (3m/M)] = - mMv/(4M + 3m) = -2.2\times10^{-2}$ kg m s^{-1} [–0.02222]: il vincolo assorbe parte della quantità di moto iniziale del sistema.

3. La forza della molla, per piccole oscillazioni, è $f = - kx = - k(L/5)\theta$ dove θ è l'angolo formato dalla porta con la propria posizione di equilibrio; il momento di tale forza rispetto al vincolo è $M = fL/5 = - k(L/5)^2\theta$. Dunque l'equazione differenziale per l'angolo è $I(d^2\theta/dt^2) = - k(L/5)^2\theta$. La pulsazione delle piccole oscillazioni, se I è il momento d'inerzia del sistema dopo l'impatto ottenuto al punto 1, è $\Omega = (L/5)\sqrt{(k/I)} = (2/5)\sqrt{[3k/(4M + 3m)]} = 6.7\ s^{-1}$ [6.746; T= 0.93 s]

4. Scegliendo t = 0 come momento dell'impatto l'angolo oscilla nel tempo con legge $\theta(t) = \theta_{max}\sin(\Omega t)$; la velocità angolare è $d\theta/dt = \Omega\theta_{max}\cos(\Omega t)$, che a t = 0 vale $\Omega\theta_{max}$; essa deve uguagliare la velocità angolare subito dopo l'impatto, cioè il valore di ω ottenuto nella risposta 1. Da $\omega = \Omega\theta_{max}$ si ottiene l'angolo massimo $\theta_{max} = \omega/\Omega = 5mv/[2\sqrt{(kI)}] = (15mv/L)/\sqrt{[3k(4M+3m)]} = 8.8\times10^{-2}$ rad [0.08784]. Lo stesso si ottiene dalla conservazione dell'energia $(1/2)I\omega^2 = (1/2)k(L\theta_{max}/5)^2$. $|[\sin(\theta_{max}) - \theta_{max}]/\sin(\theta_{max})\ | \approx |\ [\sin(\theta_{max}) - \theta_{max}]/\theta_{max}| = 0.0013 = 0.13\% < 1\%$: ok.

5. Il grafico relativo ai dati del problema è mostrato qui sotto. Il moto della pallina per t < 0 è in blu, quello per t > 0 in rosso.